IZPIT IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

15. februar 2012

1. a) Rešite sistem enačb

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)=2, \qquad |z-(5+5\mathrm{i})|=5.$$

b) Kakšni krivulji predstavljata množici rešitev prve oz. druge enačbe? Skicirajte ju.

Rešitev:

a) Z uporabo enakost $z = x + \mathrm{i}y$ dobimo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{(x-y+1)+\mathrm{i}(x+y-1)}{2}\right)=\frac{x+y-1}{2}=2\\ |z-(5+5\mathrm{i})| &= \sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}=5\end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo $x + y = 5$, oz. $y - 5 = -x$, kar vstavimo v drogo enačbo in dobimo:

$$\begin{aligned}x^2-10x+25+x^2 &= 25\\ 2x(x-5) &= 0\end{aligned}$$

Dobimo dve rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = 5$, zato je $y_1 = 5$ in $y_2 = 0$. Rešitvi sistema:

$$z_1 = 5\mathrm{i}, \qquad z_2 = 5.$$

b) Množica rešitev prve enačbe predstavlja premico, množica rešitev druge enačbe pa krožnico. Rešitvi sistema enačb predstavljata presečišči krožnice in premice.

2. Določite realni števili a in b tako, da bo funkcija

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{-1}{x+1}\right), & x<-1\\ ax+b, & -1\le x\le 0\\ \frac{\sin 3x}{x}, & x>0\end{cases}$$

zvezna na celi realni osi. Ali je dana funkcija omejena na celi realni osi?
Namig: Skicirajte graf funkcije.

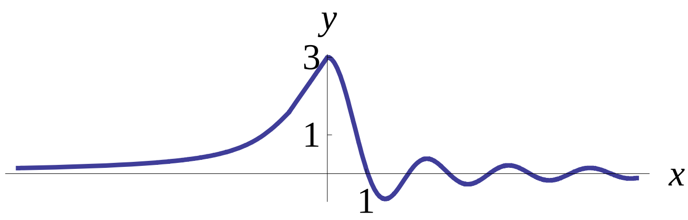
Rešitev:

Izračunamo levo in desno limito v točki $x = -1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow -1} f(x) &= \lim_{x\uparrow -1}\arctan\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{\pi}{2}\\ \lim_{x\downarrow -1} f(x) &= \lim_{x\downarrow -1}(ax+b)=-a+b\end{aligned}$$

Izračunamo levo in desno limito v točki $x = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} f(x) &= \lim_{x\uparrow 0}(ax+b)=b\\ \lim_{x\downarrow 0} f(x) &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\end{aligned}$$



Dobimo sistem enačb $-a+b=\frac{\pi}{2}$ in $b=3$, ki ima rešitev $a=3-\frac{\pi}{2}$ in $b=3$.
Dana funkcija je omejena na celi realni osi, saj je zvezna (ni polov) in se vrednost funkcije približuje 0, ko se x približuje $\pm\infty$ (glej skico).

3. Določite dimenzije valja s prostornino $V=2\pi a^3$, ki ima največjo površino. Kolikšna je ta površina? Ali lahko v tako dobljeni valj včrtamo kroglo tako, da se dotika plašča in obeh osnovnih ploskev?

Rešitev:
Iz izraza za prostornino dobimo zvezo med radijem in višino valja:

$$V=\pi r^2 v=2\pi a^3 \qquad \Rightarrow \qquad v=\frac{2a^3}{r^2}.$$

Zapišimo površino kot funkcijo r:

$$P(r)=2\pi r(r+v)=2\pi r^2+\frac{4\pi a^3}{r},$$

odvajamo po r in odvod izenačimo z 0:

$$P'(r)=4\pi r-\frac{4\pi a^3}{r^2}=0.$$

Edino stacionarno točko dobimo pri $r=a$, ki je edina realna rešitev enačbe $r^3-a^3=0$. Tedaj je $v=2a$ in $P=6\pi a^2$. V dobljeni valj lahko včrtamo kroglo na opisani način, saj je osni presek valja kvadrat.

4. Izračunajte integrala

   a)
$$\int x\,\arctan x\,\mathrm{d}x,$$

   b)
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{x^8+1}\,\mathrm{d}x.$$

   c) Ali integral iz točke b) obstaja? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

a) Integral izračunamo z integracijo per partes ($u=\mathrm{arctg}x$, $\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, $v=\frac{x^2}{2}$):

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{arctg}x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C\end{aligned}$$

b) Integral izračunamo z uvedbo nove spremenljivke ($t = x^4$, $\mathrm{d}t = 4x^3\mathrm{d}x$):

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{x^8+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4}\mathrm{arctg}t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{8}$$

c) Integral iz točke b) očitno obstaja, saj je njegova vrednost končna. Lahko pa uporabimo primerjalni kriterij ($\frac{x^3}{x^8+1} < \frac{1}{x^2}$) za dokaz obstoja integrala.

5. Izračunajte dolžino loka krivulje $y = \ln(\sin x)$ na intervalu $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$. Kolikšna je dolžina loka dane krivulje na intervalu $[\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$?

Rešitev:
Najprej izračunamo: $y' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \mathrm{ctg}x$ in $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x} = \frac{1}{\sin x}$. Dolžino loka izračunamo po formuli:

$$\begin{aligned}
s &= \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\sin x\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}\\
&\quad (t = \cos x,\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x,\ x = \pi/3 \Rightarrow t = 1/2,\ x = 2\pi/3 \Rightarrow t = -1/2)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(-\ln 1-t+\ln 1+t\right)\Big|_{-1/2}^{1/2} = \ln 3\\
&\quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t} = \frac{(A-B)t+A+B}{1-t^2} \quad\Rightarrow\quad A = B = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Zaradi periodičnosti funkcije sin, je tudi dolžina loka dane krivulje na intervalu $[\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$ enaka $\ln 3$.