# IZPIT IZ MATEMATIKE I

## Univerzitetni študij

## 11. junij 2012

1. a) Rešite neenačbo

$$\frac{3|x|}{x^2-4} < 1.$$

b) V zgornji neenačbi znak neenakosti nadomestimo z enačajem. Za katere vrednosti $x$ ima tako dobljena enačba rešitev?

**Rešitev:**

a) Opazimo $x \neq \pm 2$ in ločimo dva podprimera.

I) Za $x \geq 0$ imamo $\frac{3x}{x^2-4} < 1$.

I.i) Za $x \in [0,2)$ dobimo $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) < 0$, kar nam da rešitev $x \in (-1,4)$, oz. ob upoštevanju pogoja $x \in [0,2)$.

I.ii) Za $x \in (2,\infty)$ dobimo $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) > 0$, kar nam da rešitev $x \in (-\infty,-1) \cup (4,\infty)$, oz. ob upoštevanju pogoja $x \in (4,\infty)$.

II) Za $x < 0$ imamo $\frac{-3x}{x^2-4} < 1$.

II.i) Za $x \in (-2,0)$ dobimo $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4) < 0$, kar nam da rešitev $x \in (-4,1)$, oz. ob upoštevanju pogoja $x \in (-2,0)$.

II.ii) Za $x \in (-\infty,-2)$ dobimo $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4) > 0$, kar nam da rešitev $x \in (-\infty,-4) \cup (1,\infty)$, oz. ob upoštevanju pogoja $x \in (-\infty,-4)$.

Skupna rešitev je tedaj $x \in (-\infty,-4) \cup (-2,2) \cup (4,\infty)$.

b) Rešitvi enačbe sta $x_1 = -4$ in $x_2 = 4$.

2. a) Poenostavite izraz

$$z = \frac{4+45\mathrm{i}}{11+6\mathrm{i}} + (2+\mathrm{i})^2 - \mathrm{i}^{2012} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{21}.$$

b) Ali velja neenakost $|7\mathrm{i}| \leq |2+\mathrm{i}| + |-2+6\mathrm{i}|$?

**Rešitev:**

a) Polarna oblika: $-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$. Poenostavimo:

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{4+45\mathrm{i}}{11+6\mathrm{i}} + (2+\mathrm{i})^2 - \mathrm{i}^{2012} + \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{21} \\ &= \tfrac{(4+45\mathrm{i})(11-6\mathrm{i})}{(11+6\mathrm{i})(11-6\mathrm{i})} + 4 + 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - \mathrm{i}^0 + 1^{21} \cdot \left(\cos\tfrac{84\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{84\pi}{3}\right) \\ &= 2 + 3\mathrm{i} + 4 + 4\mathrm{i} - 1 - 1 + 1 \\ &= 5 + 7\mathrm{i} \end{aligned}$$

b) Velja po trikotniški neenakosti $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ za $\alpha = 2+\mathrm{i}$ in $\beta = -2+6\mathrm{i}$.

3. Dano je zaporedje $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$.

a) Določite natančno spodnjo mejo, natančno zgornjo mejo ter limito zaporedja.

b) Koliko členov zaporedja $a_n$ se od 0 razlikuje za manj kot $\frac{1}{2}$?

**Rešitev:**

a) Prvih nekaj členov zaporedja: $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = -\frac{3}{5}$, $a_3 = -\frac{5}{7}$, .... Ker velja

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-1-2n}{3+2n} - \frac{1-2n}{1+2n} = \frac{-4}{(3+2n)(1+2n)} < 0,$$

je zaporedje strogo padajoče. Opazimo tudi, da je $a_n > -1$ za vse $n$. Torej velja

$$\sup_n a_n = -\tfrac{1}{3}, \quad \inf_n a_n = -1, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -1.$$

b) Od 0 se za manj kot $\frac{1}{2}$ razlikuje le en (prvi) člen $a_1 = -\frac{1}{3}$.

4. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$.

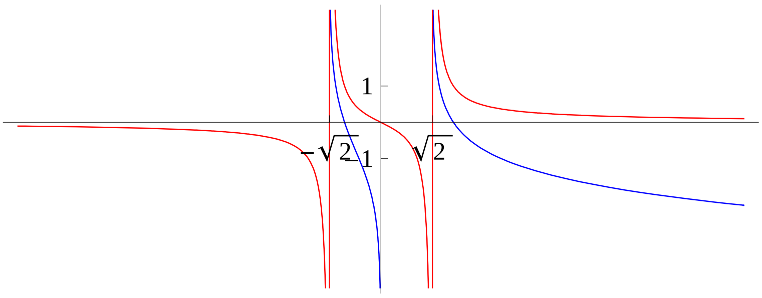
a) Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, pole, asimptoto, začetno vrednost, predznak, sodost/lihost, intervale naraščanja in padanja ter ekstreme funkcije.

b) Na isto sliko narišite grafa funkcij $f(x)$ in $g(x) = \ln(f(x))$.

**Rešitev:**

a)
- Definicijsko območje: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, zaloga vrednosti: $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.
- Ničla: $x = 0$, pola: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, vod. asimptota: $y = 0$, zač. vred.: $f(0) = 0$.
- Predznak: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ negativna, $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ pozitivna.
- Ker je $f(-x) = -f(x)$, je funkcija liha.
- Ker je $f'(x) = \frac{-x^2-2}{(x^2-2)^2} < 0$, je funkcija povsod padajoča. Ekstremov ni.

b) Grafa funkcij $f(x)$ (rdeča) in $g(x)$ (modra črta).



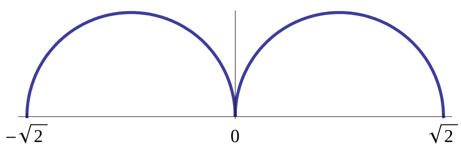

5. a) Skicirajte graf funkcije $r(\varphi) = \sqrt{1 + \cos(2\varphi)}$ za $\varphi \in [0, \pi]$. Kaj opazite?

b) Izračunajte integral

$$\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos(2\varphi)}\, \mathrm{d}\varphi.$$

**Rešitev:**

a) Opazimo, da je graf funkcije simetričen glede na $y$ os.




b)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos(2\varphi)}\, \mathrm{d}\varphi &= \int_0^\pi \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi}\, \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{2}\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$