Naloga 1 (20 točk)

Dana je enakost

$$x^2 + 2x - 35 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C.$$

a.) Poiščite takšna realna števila A, B in C, da enakost velja za vsak x. Pri tem si lahko pomagate tako, da desno stran enakosti ustrezno preuredite.

b.) Skicirajte podmnožico realne ravnine, opisane z neenačbo $y \geq |x^2 + 2x - 35|$.

Naloga 2 (20 točk)

Določite vse pare kompleksnih števil z_1 in z_2, ki rešijo sistem

$$z_1^3 \cdot \overline{z_2} = 1,$$
$$z_1 \cdot \overline{z_2} = i.$$

Ali so lahko kompleksna števila $z_1, (1-i)\, z_1, -2i\, z_1, -2(1+i)\, z_1$ začetni členi nekega geometrijskega zaporedja? Odgovor utemeljite.

Naloga 3 (20 točk)

S pomočjo prvih nekaj odvodov uganite n-ti odvod funkcije

$$f(x) = (1-x)^{-2}.$$

Dobljeno formulo za n-ti odvod funkcije f dokažite z matematično indukcijo.

Naloga 4 (20 točk)

Dana je funkcija

$$g(t) = \frac{t^3}{(1+t^2)(2-t)}.$$

a.) Izračunajte nedoločeni integral $\int g(t)\, dt$. Pazite na to, da je stopnja polinoma v števcu enaka stopnji polinoma v imenovalcu funkcije g!

b.) Kakšen predznak ima določeni integral $\int_{100}^{101} g(t)\, dt$? Odgovor utemeljite.

Naloga 5 (20 točk)

Parabolni reflektor (ploskev) dobimo z rotacijo dela krivulje $y = \sqrt{x}$ med $x = 0$ in $x = 1$ okrog abscisne osi.

a.) Izračunajte površino parabolnega reflektorja.

b.) Poiščite vsaj eno krivuljo z lastnostjo $y(0) = 0$, ki bi pri rotaciji na istem delu (med $x = 0$ in $x = 1$) ustvarila reflektor z večjo površino.