REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Dana je enakost

$$x^2 + 2x - 35 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C.$$

a.) Poiščite takšna realna števila A, B in C, da enakost velja za vsak x. Pri tem si lahko pomagate tako, da desno stran enakosti ustrezno preuredite.

b.) Skicirajte podmnožico realne ravnine, opisane z neenačbo $y \geq |x^2 + 2x - 35|$.

Rešitev:

a.) *Ko desno stran enakosti preuredimo, dobimo*

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 35 &= Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C, \\ x^2 + 2x - 35 &= Ax^2 + (B - 2A)x + A - B + C. \end{aligned}$$

Enakost bo veljala za vse x, če bodo koeficienti obeh polinomov (levega in desnega) enaki. Dobimo sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x^2:& \quad 1 &&= A, \\ x^1:& \quad 2 &&= B - 2A, \\ x^0:& \quad -35 &&= A - B + C. \end{aligned}$$

Sledi: $A = 1$, $B = 4$ *in* $C = -32$.

b.) *Ker je* $x^2 + 2x - 35 = (x-5)(x+7)$, *imamo* $y \geq |(x-5)(x+7)|$. *Iskana podmnožica realne ravnine je prikazana na spodnji sliki. Mejna krivulja je parabola* $y = (x-5)(x+7)$, *katere negativni del je zaradi absolutne vrednosti v neenačbi prezrcaljen navzgor.*

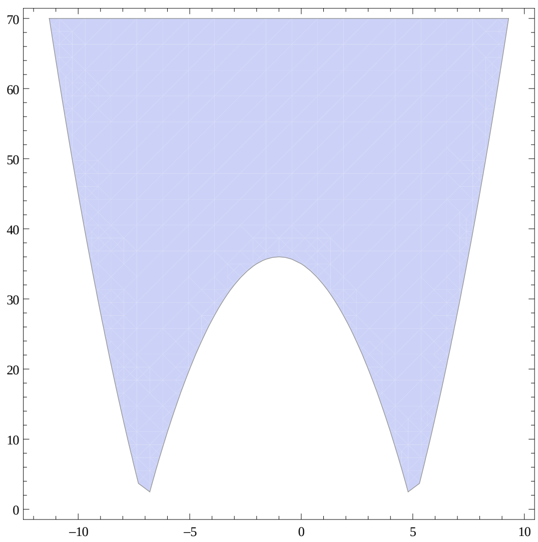
Naloga 2 (20 točk)

Določite vse pare kompleksnih števil z_1 in z_2, ki rešijo sistem

$$\begin{aligned} z_1^3 \cdot \overline{z_2} &= 1, \\ z_1 \cdot \overline{z_2} &= i. \end{aligned}$$

Ali so lahko kompleksna števila $z_1, (1-i)\,z_1, -2i\,z_1, -2(1+i)\,z_1$ začetni členi nekega geometrijskega zaporedja? Odgovor utemeljite.

Rešitev:



Ko iz druge enačbe izrazimo $\overline{z_2}$ in to vstavimo v prvo enačbo, dobimo

$$z_1^3 \cdot \frac{i}{z_1} = 1,$$
$$z_1^2 \cdot i = 1,$$
$$z_1^2 = -i.$$

Pri določitvi z_1 lahko uporabimo kartezične ali polarne koordinate. S kartezičnimi koordinatami pridemo do rešitev hitro. Če pa uporabimo polarne koordinate (in De Moivrovo formulo), zgornja enačba pravi

$$r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)) = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Od tu sledi

$$r^2 = 1,$$
$$2\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0, 1.$$

Kompleksno število z_1 lahko zavzame dve vrednosti:

$$z_1^{(1)} = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+i\right),$$
$$z_1^{(2)} = 1\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-i\right).$$

Izračunajmo še obe vrednosti kompleksnega števila z_2:

$$\overline{z_2^{(1)}} = \frac{i}{z_1^{(1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-i\right) \ \Rightarrow\ z_2^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(i+1\right),$$
$$\overline{z_2^{(2)}} = \frac{i}{z_1^{(2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+i\right) \ \Rightarrow\ z_2^{(2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right).$$

Kompleksna števila

$$
\begin{aligned}
a_1 &= z_1,\\
a_2 &= (1-i)\,z_1,\\
a_3 &= -2i\,z_1,\\
a_4 &= -2(1+i)\,z_1
\end{aligned}
$$

so lahko začetni členi nekega geometrijskega zaporedja, če obstaja kompleksno takšno število q, da je

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1\cdot q,\\
a_3 &= a_1\cdot q^2,\\
a_4 &= a_1\cdot q^3.
\end{aligned}
$$

Ker je

$$
\begin{aligned}
(1-i)^2 &= 1-2i-1=-2i,\\
(1-i)^3 &= -2i(1-i)=-2i-2=-2(1+i),
\end{aligned}
$$

so dana kompleksna števila začetni členi geometrijskega zaporedja s kvocientom $q=1-i$.

Naloga 3 (20 točk)

S pomočjo prvih nekaj odvodov uganite n-ti odvod funkcije

$$f(x)=(1-x)^{-2}.$$

Dobljeno formulo za n-ti odvod funkcije f dokažite z matematično indukcijo.

Rešitev:

Izračunajmo prvih nekaj odvodov funkcije f:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1-x)^{-2},\\
f'(x) &= (-2)(1-x)^{-3}\cdot(-1)=2(1-x)^{-3},\\
f''(x) &= 2(-3)(1-x)^{-4}\cdot(-1)=2\cdot 3(1-x)^{-4},\\
f'''(x) &= 2\cdot 3\cdot(-4)(1-x)^{-5}\cdot(-1)=2\cdot 3\cdot 4(1-x)^{-5},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Zdaj lahko uganemo formulo za n-ti odvod funkcije f:

$$f^{(n)}(x)=(n+1)!(1-x)^{-(n+2)}.$$

Matematična indukcija:

$\boxed{n=1}$*: Najprej baza indukcije. Preverimo pravilnost formule za $n=1$:*

$$(1+1)!(1-x)^{-(1+2)}=2(1-x)^{-3}=f'(x).$$

$\boxed{n \to n+1}$: *Indukcijski korak. Predpostavimo, da formula velja za naravno število n. Preverimo, ali tedaj velja tudi za naravno število $n+1$:*

$$\begin{aligned}((n+1)+1)!(1-x)^{-((n+1)+2)} &= (n+2)!(1-x)^{-(n+3)} \\ &= \big((n+1)!(1-x)^{-(n+2)}\big)' \\ &= (f^{(n)}(x))' \\ &= f^{(n+1)}(x).\end{aligned}$$

Veljavnost formule je dokazana.

Naloga 4 (20 točk)

Dana je funkcija

$$g(t) = \frac{t^3}{(1+t^2)(2-t)}.$$

a.) Izračunajte nedoločeni integral $\displaystyle\int g(t)\,dt$. Pazite na to, da je stopnja polinoma v števcu enaka stopnji polinoma v imenovalcu funkcije g!

b.) Kakšen predznak ima določeni integral $\displaystyle\int_{100}^{101} g(t)\,dt$? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

a.) *Ker imata polinoma v števcu in imenovalcu racionalne funkcije isti stopnjo, polinoma najprej delimo:*

$$\begin{array}{l} t^3 : (1+t^2)(2-t) = t^3 : (-t^3+2t^2-t+2) = -1 + \dfrac{ost.}{(1+t^2)(2-t)} \\ \quad -\,(t^3-2t^2+t-2) \\ \hline \quad 2t^2-t+2 \quad \textit{ostanek} \end{array}$$

Dobili smo

$$g(t) = \frac{t^3}{(1+t^2)(2-t)} = -1 + \frac{2t^2-t+2}{(1+t^2)(2-t)}.$$

Pri izračunu

$$\int \frac{2t^2-t+2}{(1+t^2)(2-t)}\,dt$$

bomo uporabili delne ulomke:

$$\begin{aligned}\frac{2t^2-t+2}{(1+t^2)(2-t)} &= \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{2-t} \\ &= \frac{(At+B)(2-t)+C(1+t^2)}{(1+t^2)(2-t)} \\ &= \frac{(C-A)t^2+(2A-B)t+2B+C}{(1+t^2)(2-t)}.\end{aligned}$$

Ker mora veljati

$$\begin{aligned} t^2: &\quad 2 &= C - A, \\ t^1: &\quad -1 &= 2A - B, \\ t^0: &\quad 2 &= 2B + C, \end{aligned}$$

sledi $A = -\frac{2}{5}$, $B = \frac{1}{5}$ *in* $C = \frac{8}{5}$. *Sedaj lahko izračunamo*

$$\begin{aligned} \int \frac{2t^2 - t + 2}{(1+t^2)(2-t)}\, dt &= \int \left(\frac{-\frac{2}{5}t + \frac{1}{5}}{1+t^2} + \frac{\frac{8}{5}}{2-t} \right) dt \\ &= \int \left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+t^2} - \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{t-2} \right) dt \\ &= -\frac{1}{5} \ln(1+t^2) + \frac{1}{5} \arctan t - \frac{8}{5} \ln|t-2| + C. \end{aligned}$$

Sledi rezultat

$$\begin{aligned} \int g(t)\, dt &= \int \left(-1 + \frac{2t^2 - t + 2}{(1+t^2)(2-t)} \right) dt, \\ &= -t - \frac{1}{5} \ln(1+t^2) + \frac{1}{5} \arctan t - \frac{8}{5} \ln|t-2| + C. \end{aligned}$$

b.) Na intervalu $[100, 101]$ *ima funkcija* g *negativen predznak. Opazovan del grafa leži povsod pod abscisno osjo. Iskani določeni integral je zato negativno predznačen:*

$$\int_{100}^{101} g(t)\, dt < 0.$$

Naloga 5 (20 točk)

Parabolni reflektor (ploskev) dobimo z rotacijo dela krivulje $y = \sqrt{x}$ med $x = 0$ in $x = 1$ okrog abscisne osi.

a.) Izračunajte površino parabolnega reflektorja.

b.) Poiščite vsaj eno krivuljo z lastnostjo $y(0) = 0$, ki bi pri rotaciji na istem delu (med $x = 0$ in $x = 1$) ustvarila reflektor z večjo površino.

Rešitev:

a.) Površino rotacijske ploskve izračunamo po formuli

$$P = 2\pi \int_0^1 y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Ker je $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$*, dobimo*

$$
\begin{aligned}
P &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx, \\
&= \pi \int_0^1 \sqrt{4x+1}\,dx = \frac{\pi}{6}(4x+1)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).
\end{aligned}
$$

V zgornjem računu smo v integral uvedli novo spremeljivko $t = 4x + 1$.

b.) *Funkcija, ki zahtevanim pogojem zagotovo zadošča, je funkcija* f*, za katero velja*

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0, \\
f(x) &\geq \sqrt{x} \text{ za } x \in [0,1], \\
\sqrt{1+(f'(x))^2} &\geq \sqrt{1+\frac{1}{4x}} \text{ za } x \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Takšna funkcija je na primer funkcija $f(x) = 2\sqrt{x}$.