Naloga 1 (20 točk)

Dano je zaporedje racionalnih števil

$$\frac{1}{1-4}, \frac{2}{1+9}, \frac{3}{1-16}, \frac{4}{1+25}, \frac{5}{1-36}, \ldots .$$

Določite splošni člen zaporedja a_n ter najmanjši in največji člen zaporedja, če obstajata. Ali vrsta

$$\frac{1}{1-4} + \frac{2}{1+9} + \frac{3}{1-16} + \frac{4}{1+25} + \frac{5}{1-36} + \cdots$$

konvergira? Odgovor utemeljite.

Naloga 2 (20 točk)

Model naraščanja populacije za neko mesto za nekaj zaporednih let opisuje funkcija

$$P(t) = P(0)\, e^{\frac{t}{100}},$$

kjer t pomeni število pretečenih let, $P(0) = 200\,000$ pa je velikost populacije ob času $t = 0$, ki pripada letu 2000.

- Izračunajte inverzno funkcijo k funkciji P in pojasnite njen pomen.
- Katerega leta se bo populacija v mestu podvojila? Odgovor utemeljite.

Naloga 3 (20 točk)

Izračunajte vsa presečišča krožnice in elipse:

$$x^2 + y^2 = 4, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Določite tudi kot, pod katerim se krivulji sekata v točki z absciso $x = 0$.

Naloga 4 (20 točk)

Z uvedbo nove spremenljivke $x = 2\tan t$ izračunajte določeni integral

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\, dx.$$

Kakšna je povprečna vrednost funkcije $y = \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$?

NAMIG: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Naloga 5 (20 točk)

Električne žice, ki so pritrjene na dveh stebrih, se povesijo v obliki verižnice, tj. krivulje hiperbolični kosinus.

- Poiščite dolžino viseče žice, ki je pritrjena med stebroma na razdalji 40 m in se je povesila v obliki grafa funkcije $f(x) = 20\cosh\frac{x}{20}$, $-20 \le x \le 20$.
- Kako bi morali spremeniti funkcijski predpis, če bi želeli dolžino iste žice izračunati z integriranjem na intervalu $0 \le x \le 40$? Zapišite spremenjen funkcijski predpis.