REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Dano je zaporedje racionalnih števil

$$\frac{1}{1-4}, \frac{2}{1+9}, \frac{3}{1-16}, \frac{4}{1+25}, \frac{5}{1-36}, \ldots .$$

Določite splošni člen zaporedja a_n ter najmanjši in največji člen zaporedja, če obstajata. Ali vrsta

$$\frac{1}{1-4} + \frac{2}{1+9} + \frac{3}{1-16} + \frac{4}{1+25} + \frac{5}{1-36} + \cdots$$

konvergira? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

Splošni člen zaporedja:

$$a_n = \frac{n}{1+(-1)^n(n+1)^2}.$$

Zaporedje razdelimo na dve podzaporedji:

- $\frac{n}{1-(n+1)^2}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$
  To podzaporedje narašča od $\frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$ *(najmanjši člen) proti* 0 *(supremum, limita).*
- $\frac{n}{1+(n+1)^2}$, $n = 2, 4, 6, \ldots$
  To podzaporedje pada od $\frac{2}{1+9} = \frac{1}{5}$ *(največji člen) proti* 0 *(infimum, limita).*

Sklep: najmanjši člen zaporedja $\{a_n\}$ *je* $\min_n a_n = -\frac{1}{3}$, *največji pa* $\max_n a_n = \frac{1}{5}$.

Dano vrsto preoblikujmo:

$$\frac{1}{1-4} + \frac{2}{1+9} + \frac{3}{1-16} + \frac{4}{1+25} + \frac{5}{1-36} + \cdots$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{10} - \frac{3}{15} + \frac{4}{26} - \frac{5}{35} + \frac{6}{48} - \frac{7}{63} + \cdots$$

Dobili smo alternirajočo vrsto s členi, katerih absolutne vrednosti monotono padajo proti 0. *Po Leibnitzovem kriteriju je ta vrsta konvergentna.*

Naloga 2 (20 točk)

Model naraščanja populacije za neko mesto za nekaj zaporednih let opisuje funkcija

$$P(t) = P(0)\, e^{\frac{t}{100}},$$

kjer t pomeni število pretečenih let, $P(0) = 200\,000$ pa je velikost populacije ob času $t = 0$, ki pripada letu 2000.

- Izračunajte inverzno funkcijo k funkciji P in pojasnite njen pomen.
- Katerega leta se bo populacija v mestu podvojila? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

- *Najprej izračunajmo inverzno funkcijo:*

$$
\begin{aligned}
P(t) &= 200\,000\, e^{\frac{t}{100}}, \\
t &= 200\,000\, e^{\frac{P}{100}}, \\
\frac{t}{200\,000} &= e^{\frac{P}{100}}, \\
\ln \frac{t}{200\,000} &= \frac{P}{100}, \\
P &= 100 \cdot \ln \frac{t}{200\,000}, \\
P^{-1}(x) &= 100 \cdot \ln \frac{x}{200\,000}.
\end{aligned}
$$

  Če pomeni $P(t)$ velikost populacije po t pretečenih letih, pomeni $P^{-1}(x)$ število pretečenih let, v katerih populacija v mestu naraste na x.

- *Populacija se bo podvojila po*

$$P^{-1}(2 * 200\,000) = 100 \cdot \ln \frac{200\,000}{200\,000} = 100 \cdot \ln 2 \doteq 69.3$$

  pretečenih letih. To bo leta $2000 + 100 \cdot \ln 2 \doteq 2069.3$.

Naloga 3 (20 točk)

Izračunajte vsa presečišča krožnice in elipse:

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Določite tudi kot, pod katerim se krivulji sekata v točki z absciso $x = 0$.

Rešitev:

Enačbo elipse pomnožimo s 4 *in enačbi odštejmo:*

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 4 \\
x^2 + \frac{4}{9}(y-1)^2 &= 4 \\
\hline
y^2 - \frac{4}{9}(y-1)^2 &= 0 \\
9y^2 - 4(y-1)^2 &= 0 \\
5y^2 + 8y - 4 &= 0
\end{aligned}
$$

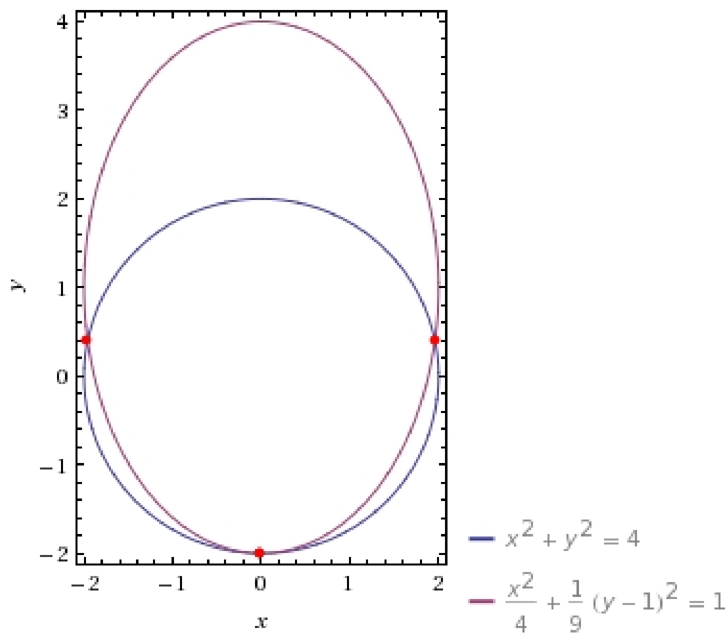
$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{10} = \frac{-8 \pm 12}{10}$$

$$y_1 = \frac{2}{5} \quad \textit{in} \quad y_2 = -2$$

Pripadajoče abscise x izračunamo iz enačbe krožnice: $x^2 = 4 - y^2$. Dobimo tri presečišča:

$$T_1\left(\frac{4\sqrt{6}}{5}, \frac{2}{5}\right), \ T_2\left(-\frac{4\sqrt{6}}{5}, \frac{2}{5}\right) \ \text{ in } T_3(0, -2).$$

Da bi določili kot, pod katerim se krivulji sekata v točki z absciso $x = 0$, si lahko narišemo skico obeh krivulj ali pa izračunamo smerna koeficienta tangent in zato odvoda obeh implicitno podanih funkcij. Prvi način je hitrejši, saj vidimo, da sta v presečišču $T_3(0, -2)$ obe tangenti vodoravni. Krivulji se zato sekata pod kotom 0 stopinj.



Naloga 4 (20 točk)

Z uvedbo nove spremenljivke $x = 2\tan t$ izračunajte določeni integral

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\, dx.$$

Kakšna je povprečna vrednost funkcije $y = \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$?

NAMIG: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Rešitev:

V integral uvedimo novo spremenljivko:

$$x = 2\tan t \implies dx = \frac{2}{\cos^2 t}\, dt.$$

Posebej poglejmo, kaj se pri tem zgodi z izrazom pod integralom:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\,dx &= \frac{1}{(2\tan t)^2\sqrt{4+(2\tan t)^2}}\cdot\frac{2}{\cos^2 t}dt \\
&= \frac{1}{4\tan^2 t\sqrt{4+4\tan^2 t}}\cdot\frac{2}{\cos^2 t}dt \\
&= \frac{1}{2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\sqrt{4(1+\tan^2 t)}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin^2 t\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{|\cos t|}{\sin^2 t}\,dt.
\end{aligned}$$

Dobljen izraz vstavimo v določeni integral (tudi meje se spremenijo):

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{|\cos t|}{\sin^2 t}\,dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt.$$

V integral uvedimo še eno novo spremenljivko:

$$u = \sin t \quad\Longrightarrow\quad du = \cos t\,dt.$$

Sedaj izračunajmo določeni integral (spet se meje spremenijo):

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\,dx &= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{u^2}\,du \\
&= \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}u^{-2}\,du = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{u}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}+2\right) = \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

Povprečno vrednost integrabilne funkcije f na intervalu $[a,b]$ izračunamo po formuli

$$p = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Sledi

$$p = \frac{1}{2-\frac{2}{\sqrt{3}}}\cdot\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{8\sqrt{3}-8}.$$

Naloga 5 (20 točk)

Električne žice, ki so pritrjene na dveh stebrih, se povesijo v obliki verižnice, tj. krivulje hiperbolični kosinus.

- Poiščite dolžino viseče žice, ki je pritrjena med stebroma na razdalji $40\,\mathrm{m}$ in se je povesila v obliki grafa funkcije $f(x) = 20\cosh\frac{x}{20}$, $-20 \leq x \leq 20$.
- Kako bi morali spremeniti funkcijski predpis, če bi želeli dolžino iste žice izračunati z integriranjem na intervalu $0 \leq x \leq 40$? Zapišite spremenjen funkcijski predpis.

Rešitev:

- *Dolžino viseče žice izračunamo kot dolžino loka krivulje hiperbolični kosinus:*

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx &= \int_{-20}^{20} \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{20}}\,dx \\
&= \int_{-20}^{20} \sqrt{\cosh^2\frac{x}{20}}\,dx \\
&= \int_{-20}^{20} \cosh\frac{x}{20}\,dx \\
&= 2\cdot\int_{0}^{20} \cosh\frac{x}{20}\,dx \\
&= 2\left[20\sinh\frac{x}{20}\right]_0^{20} \\
&= 40(\sinh 1 - \sinh 0) \\
&= 40\sinh 1 \\
&= 20\left(e-\frac{1}{e}\right) \\
&\doteq 47.
\end{aligned}$$

- *Če želimo dolžino iste žice izračunati z integriranjem na intervalu $0 \leq x \leq 40$ (namesto na intervalu $-20 \leq x \leq 20$), moramo graf funkcije f za 20 premakniti v desno. Ta premik funkcijski predpis spremeni takole:*

$$f_n(x) = 20\cosh\frac{x-20}{20}.$$

Tedaj je

$$\int_{-20}^{20} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^{40} \sqrt{1+(f_n'(x))^2}\,dx.$$