IZPIT IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

12. februar 2013

1. a) Rešite enačbo
$$3z^2 + 2\bar{z}^2 = 4\mathrm{i}.$$
   b) Ali obstaja tak $a \in \mathbb{R}$, da je rešitev enačbe $3z^2 + 2\bar{z}^2 = a\mathrm{i}$ natanko ena?

   Rešitev:

   a) Z vpeljavo $z = x + \mathrm{i}y$ dobimo kompleksno enačbo
$$5x^2 + 2xy\mathrm{i} - 5y^2 = 4\mathrm{i}.$$
   Sistem realnih enačb $xy = 2$ in $x^2 - y^2 = 0$ ima dve rešitvi: $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = \sqrt{2}$ in $x_2 = -\sqrt{2}$, $y_2 = -\sqrt{2}$, od koder sledi $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ in $z_2 = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

   b) Tak parameter a, da bo rešitev ena samo, obstaja in je enak $a = 0$.

2. a) Določite definicijsko območje funkcije
$$f(x) = \arccos\left(\frac{3x}{x+4}\right) + \ln\left(\left|\frac{2x}{x-1}\right|\right).$$
   b) Določite še zalogo vrednosti dane funkcije.

   Rešitev:

   a) Najprej opazimo, da mora biti $x \neq -4$ in $x \neq 1$, da ne delimo z 0, ter $x \neq 0$, da je definiran logaritem. Da bo definiran arkus kosinus, mora biti $-1 \leq \frac{3x}{x+4} \leq 1$.

   - Nenenačbo $-1 \leq \frac{3x}{x+4}$ preoblikujemo v kvadratno neenačbo $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4) \geq 0$, ki ima rešitev $x \in (-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$.
   - Nenenačbo $\frac{3x}{x+4} \leq 1$ preoblikujemo v kvadratno neenačbo $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4) \leq 0$, ki ima rešitev $x \in [-4, 2]$.

   Skupna rešitev brez upoštevanja $x = -4$ je interval $[-1, 2]$. Torej je definicijsko območje funkcije $\mathcal{D}_f = [-1, 2] \setminus \{0, 1\}$.

   b) Zaloga vrednosti funkcije f je $\mathcal{Z}_f = (-\infty, \infty)$.

3. Določite konstanti a in b tako, da bo eden izmed lokalnih ekstremov funkcije
$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{a - b\cos x}$$
v točki $T(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$. Koliko lokalnih ekstremov ima dana funkcija?

   Rešitev:

   Izpolnjena morata biti pogoja $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$ in $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$. Odvod funkcije je
$$f'(x) = \frac{2\sin x\cos x(a - b\cos x) - b\sin^3 x}{(a - b\cos x)^2}.$$
   Iz prvega pogoja sledi $2a - b = 6$, iz drugega z upoštevanjem prvega pa $12\sqrt{3} - 3b\sqrt{3} = 0$. Konstanti sta $a = 5$ in $b = 4$. Dana funkcija ima neskončno lokalnih ekstremov.

4. Izračunajte integrala

a)

$$\int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

b)

$$\int x \arccos x \, \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

a) Najprej izračunamo nedoločen integral z uvedbo nove spremenljivke $x = \cos t$, $\sqrt{1-x^2} = \sin t$ in $\mathrm{d}x = -\sin t \mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= -\int \cos^2 t \, \mathrm{d}t = -\int \frac{1+\cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) = -\frac{1}{2}\arccos x - \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

Upoštevali smo zvezo $\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$. Določen integral:

$$\int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left(-\frac{1}{2}\arccos x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

b) Integral izračunamo z uporabo metode per partes ($u = \arccos x$, $\mathrm{d}u = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = x\mathrm{d}x$, $v = \frac{x^2}{2}$) ter točke a):

$$\int x \arccos x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arccos x + \frac{1}{2}\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2 \arccos x - \arccos x - x\sqrt{1-x^2}}{4} + C.$$

5. Narišite krivuljo

$$r(\varphi) = \frac{\varphi}{\pi},$$

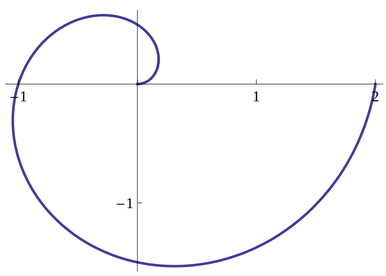
$0 < \varphi < 2\pi$. Nato izračunajte še prostornino rotacijskega telesa, ki nastane, ko dano krivuljo na intervalu $0 < \varphi < \pi$ zarotiramo okrog osi x.

Rešitev:

Tabela vrednosti:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
r	0	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1	$3/2$	2

Slika:



Volumen rotacijskega telesa izračunamo po formuli

$$V = \pi \int_\alpha^\beta r^2 \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi^2 \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\pi}\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}.$$