Izpit Matematika I - UNI

10.junij 2013

1. V množici realnih števil poiščite rešitve enačbe

$$\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x-3} \quad !$$

2. Poiščite *definicijsko območje* funkcije

$$F(x) = \log(f(x)) + \log(1 - f(x)) \quad ,$$

   kjer je

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1} \quad !$$

3. Iz *8 dm* dolge žice oblikujemo krožni izsek. Kolikšna je maksimalna možna ploščina izseka ?

4. Izračunajte določeni integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad !$$

5. Kolikšna je ploščina območja, ki je v polarnih koordinatah določeno z neenačbama

$$1 + \cos\varphi < r < 1 \quad ?$$

Rešitve

1. naloga

$$3x+4-2\sqrt{3x+4}\sqrt{2x+1}+2x+1=x-3$$

$$4x+8=2\sqrt{3x+4}\sqrt{2x+1}$$

$$2x+4=\sqrt{3x+4}\sqrt{2x+1}$$

$$4x^2+16x+16=6x^2+11x+4$$

$$2x^2-5x-12=0$$

$$(2x+3)(x-4)=0$$

$$x_1=4\ ,\ x_2=-\frac{3}{2}$$

Pri kvadriranju enačb smo lahko pridobili rešitve.

Preizkus pokaže, da x_2 ni koren, x_1 pa je.

$$\boxed{x_1=4}$$

2. naloga

Rešiti je treba $f(x) > 0$ in $1 - f(x) > 0$

Diskriminanta polinoma v imenovalcu funkcije $f(x)$ je negativna. Imenovalec je pozitiven za vse x in prvi logaritem se da izračunati če je $x > 0$.

$$1 - \frac{x}{x^2 - x + 1} > 0$$
$$x^2 - x + 1 - x > 0$$
$(x-1)^2 > 0$ velja za vsak x razen $x = 1$

Rezultat je

$$\boxed{\mathcal{D}_F = (0,1) \cup (1,\infty)}$$

3. naloga

Ploščina krožnega izseka z radijem r in središčnim kotom α je enaka

$$P = \pi r^2 \frac{\alpha}{2\pi}$$

V izseku sta radij in središčni kot povezana z enačbo $2r + \alpha r = 8$ (tj. obseg = dolžina žice). Iz te zveze izrazimo $\alpha = \frac{8}{r} - 2$ in iz ploščine eliminiramo α:

$$P = 4r - r^2$$

Ploščina bo maksimalna, če je $P' = 4 - 2r = 0$ in to je pri $r = 2$:

$$\boxed{P_{max} = 4}$$

4. naloga

V Integral vpeljemo novo spremenljivko

$x^2 + 1 = t^2$

$2x\,dx = 2t\,dt \ \rightarrow \ dx = \dfrac{t\,dt}{x}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{t\,dt}{x^2\,t} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \cdots$$

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{t^2-1}$$

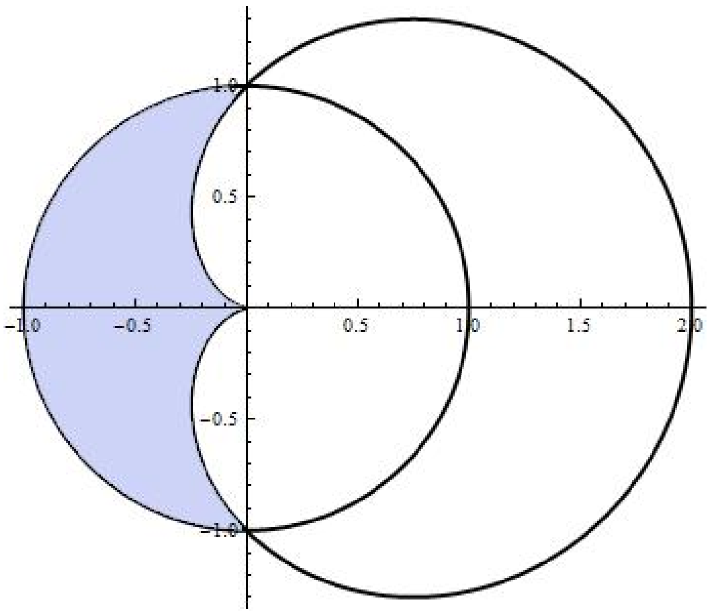
$A + B = 0\ ,\ A - B = 1 \ \rightarrow \ A = \dfrac{1}{2}\ ,\ B = -\dfrac{1}{2}$

$$\cdots = \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Big) dt = \frac{1}{2}\Big(\ln(t-1) - \ln(t+1)\Big)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = \boxed{\ln(\sqrt{2}+1)}$$

5. naloga



$$P = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \Big(1 - (1 + \cos\varphi)^2\Big)\, d\varphi \; = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big(-2\cos\varphi - \cos^2\varphi\Big)\, d\varphi \; =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big(-2\cos\varphi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big)\, d\varphi \; = \Big(-2\sin\varphi - \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\Big)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2 + \frac{\pi}{4} = \boxed{2 - \frac{\pi}{4}}$$