Izpit Matematika I - UNI

27.avgust 2013

1. V množici realnih števil rešite neenačbo
$$|x| > |2x-4| \quad .$$

2. Izračunajte limito zaporedja s splošnim členom
$$a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)^{2n} \quad .$$

3. Določite parameter a tako, da se paraboli
$$y = ax^2 \quad \text{in} \quad y = a(x-2)^2$$
sekata pod pravim kotom.

4. Izračunajte določeni integral
$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-x}(x+1)\,dx \quad ,$$
kjer je x_0 tista točka, kjer ima funkcija $y = e^{-x}(x+1)$ ekstrem.

5. Vzemimo paraboli iz 3. naloge za vrednost parametra $a = 3$. Kolikšna je ploščina lika, ki je omejen s parabolama in osjo y ?

Rešitve

1. naloga

Realna števila razdelimo na tri disjunktne intervale v točkah $x = 0$ in $x = 2$. Na vsakem intervalu upoštevamo definicijo absolutne vrednosti in rešimo neenačbo. Na koncu napravimo unijo vseh delnih rešitev.

Interval: $x < 0$

Neenačba: $-x > -2x + 4$

$x > 4$

Ni rešitev

Interval: $0 \leq x < 2$

Neenačba: $x > -2x + 4$

$x > \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} < x < 2$

Interval: $x \geq 2$

Neenačba: $x > 2x - 4$

$x < 4$

$2 \leq x < 4$

$$\boxed{\frac{4}{3} < x < 4}$$

2. naloga

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)^{-2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-2} = \boxed{e^{-2}}$$

3. naloga

Poiščemo presečišče parabol:

$$ax^2 = a(x-2)^2$$
$$x^2 = x^2 - 4x + 4$$
$$x = 1$$

V skupni točki mora za smerna koeficienta tangent veljati $k_2 = -1/k_1$

$$y_1' = 2ax \quad , \quad k_1 = y_1'(1) = 2a$$
$$y_2' = 2a(x-2) \quad , \quad k_2 = y_2'(1) = -2a$$
$$2a = \frac{1}{2a}$$
$$4a^2 = 1$$

$$\boxed{a = \pm\frac{1}{2}}$$

4. naloga

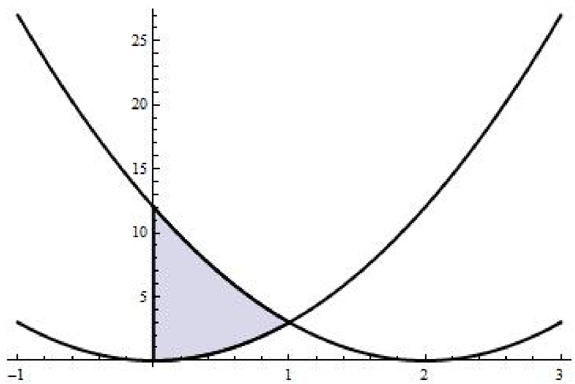
$$y = e^{-x}(x+1)$$
$$y' = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} = -xe^{-x}$$
$$y' = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 0$$

Nedoločeni integral izračunamo z metodo *per partes*

$$u = x+1 \quad , \quad du = dx$$
$$dv = e^{-x}dx \quad , \quad v = -e^{-x}$$
$$\int e^{-x}(x+1)dx = -e^{-x}(x+1) + \int e^{-x}dx = -(x+2)e^{-x}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-x}(x+1)\,dx = -(x+2)e^{-x}\Big|_0^{\infty} = \boxed{2}$$

5. naloga



$$P = \int_0^1 \left[3(x-2)^2 - 3x^2\right] dx \ = \int_0^1 (12 - 12x)\, dx \ =$$

$$12x - 6x^2 \Big|_0^1 = \boxed{6}$$