IZPIT IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

21. januar 2014

1. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2-2}$.

   a) Ugotovite monotonost tega zaporedja.

   b) Določite minimalni in maksimalni člen, če obstajata, sicer določite infimum in supremum. Določite še limito tega zaporedja, če obstaja.

   c) Ali vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira? Odgovor utemeljite.

   Rešitev:

   a) Ker je

   $$a_{n+1} - a_n = \frac{n^2+2n+2}{3n^2+6n+1} - \frac{n^2+1}{3n^2-2} = \frac{-10n-5}{(3n^2+6n+1)(3n^2-2)} < 0,$$

   je dano zaporedje strogo padajoče.

   b) Sledi

   $$\begin{aligned} \max_n a_n &= a_1 = 2 = \sup_n a_n, \\ \min_n a_n & \quad \text{ne obstaja}, \\ \inf_n a_n &= \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

   c) Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{3n^2-2}$ divergira, ker členi a_n ne padajo proti 0.

2. Izračunajte limito

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{\mathrm{tg}^2 x}.$$

   Rešitev: Limita je (dvakrat uporabimo L'Hopitalovo pravilo)

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{\mathrm{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x}{2\mathrm{tg}x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} \lim_{x\to 0} \frac{2\mathrm{e}^x + 4x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x}{\frac{2-4\sin^2 x}{\cos^4 x}} = 1$$

3. Določite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije

   $$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-3x}.$$

   Rešitev:

   Kandidate za lokalne ekstreme dobimo tam, kjer je prvi odvod enak 0

   $$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-3x} - 3x^2\mathrm{e}^{-3x} = x(2-3x)\mathrm{e}^{-3x} = 0.$$

   Stacionarni točki sta $x_1 = 0$ in $x_2 = \frac{2}{3}$. Drugi odvod je

   $$f''(x) = (2 - 12x + 9x^2)\mathrm{e}^{-3x}.$$

   Ker je $f''(0) = 2 > 0$, je v tej točki lokalni minimum, in ker je $f''(\frac{2}{3}) = -2\mathrm{e}^{-2} < 0$, je v tej točki lokalni maksimum.

4. Izračunajte integral
$$\int \frac{3x^4+4}{x^3(x^2+2)}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Nastavek za rešitev je

$$\int \frac{3x^4+4}{x^3(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = A\ln|x| + \frac{Bx+C}{x^2} + D\ln|x^2+2| + E\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + F.$$

Odvajamo in dobimo

$$\begin{aligned}\frac{3x^4+4}{x^3(x^2+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx-2(Bx+C)}{x^3} + \frac{2Dx}{x^2+2} + \frac{E\sqrt{2}}{x^2+2}\\ &= \frac{(A+2D)x^4 + (-B+E\sqrt{2})x^3 + (2A-2C)x^2 - 2Bx - 4C}{x^3(x^2+2)}.\end{aligned}$$

Iz primerjave koeficientov dobimo sistem $A+2D=3$, $-B+E\sqrt{2}=0$, $2A-2C=0$, $-2B=0$ in $-4C=4$, ki ima rešitev $A=-1$, $B=0$, $C=-1$, $D=2$ in $E=0$. Sledi

$$\int \frac{3x^4+4}{x^3(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = -\ln|x| - \frac{1}{x^2} + 2\ln|x^2+2| + F.$$

5. Dana je krivulja $x(t)=2\cos^3 t$, $y(t)=3\sin^3 t$.

   a) Narišite to krivuljo za $t\in[0,2\pi]$.

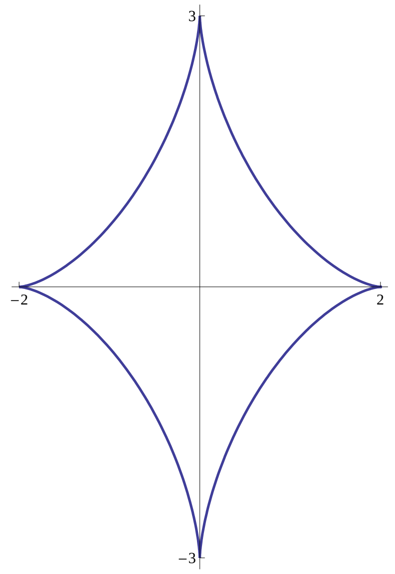
   b) Izračunajte dolžino te krivulje.

Rešitev:

a) Tabela:

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
x	2	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-2	0	2
y	0	$3\sqrt{2}/4$	3	$3\sqrt{2}/4$	0	-3	0

Slika:



b) Najprej izračunamo odvode po parametru

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -6\sin t\cos^2 t,\\ \dot{y} &= 9\sin^2 t\cos t.\end{aligned}$$

Dolžino krivulje izračunamo po formuli

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36\sin^2 t\cos^4 t + 81\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{4+5\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{12}{10}\int_4^9 u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{4}{5}u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9 = \frac{76}{5}.\end{aligned}$$

Upoštevali smo uvedbo nove spremenljivke $u = 4+5\sin^2 t$ z diferencialom $\mathrm{d}u = 10\sin t\cos t dt$ in novimi mejami $t=0 \Rightarrow u=4$ ter $t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=9$.