IZPIT IZ MATEMATIKE I
Univerzitetni študij

4. februar 2014

1. (a) Izračunajte $w = \left(\sqrt{3} + i\right)^8$.

   (b) Poiščite vse rešitve enačbe
$$z^4 = \left(\sqrt{3} + i\right)^8.$$

Rešitev.

(a) Pretvorimo $u = \sqrt{3} + i$ v polarno obliko:
$$u = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Tako velja:
$$w = u^8 = 2^8\left(\cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6}\right) = 2^8\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -128 - 128\sqrt{3}\,i$$

(b) Uporabimo direktno formulo in dobimo
$$z_0 = 2^2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}}{4}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$$
$$z_1 = 2^2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3} + 2\,i$$
$$z_2 = 2^2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -2 - 2\sqrt{3}\,i$$
$$z_3 = 2^2\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} - 2\,i$$

2. (a) Izračunajte limito zaporedja $a_n = \frac{3n+1}{2-3n}$.

   (b) Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja
$$a_n = \frac{3n+1}{2-3n}$$
   razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon = 0.05$?

   (c) Napišite primer zaporedja b_n, da bo odgovor na vprašanje

"Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja b_n razlikujejo od limite za manj kot ε?"

neodvisen od vrednosti ε.

Rešitev.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

(b)

$$\begin{aligned} \left|\frac{3n+1}{2-3n} - (-1)\right| &< 0.05 \\ \left|\frac{3}{2-3n}\right| &< 0.05 \\ \left|\frac{2-3n}{3}\right| &> \frac{1}{0.05} \\ |2-3n| &> 60 \\ -(2-3n) &> 60 \\ 3n &> 62 \\ n &> \frac{62}{3} \end{aligned}$$

Odgovor: od vključno 21-ega člena dalje.

(c) Primeri so konstantna zaporedja, tj. $b_n = C$, na primer $b_n = 1$ (za vse $n \in \mathbb{N}$).

3. Z ustreznim kriterijem raziščite konvergenco vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{3n^3+n}.$$

Rešitev. Uporabimo korenski kriterij:

$$\begin{aligned} q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{3n^3+n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{3n^2+1} \\ = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3-2}{2n^2+3}\right)^{3n^2+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{2n^2+3}{2}}\right)^{3n^2+1} \\ = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{2n^2+3}{2}}\right)^{\frac{2n^2+3}{2}\,\frac{2}{2n^2+3}\,(3n^2+1)} &= e^{-3} < 1 \end{aligned}$$

Torej vrsta konvergira.

4. Poiščite vse točke na krivulji
$$x^2 + xy + y^2 = 3,$$
v katerih je tangentna premica vzporedna premici $y = 3$.

Rešitev. Ker ima premica $y = 1$ naklon k enak 0, v resnici iščemo točke na dani krivulji, kjer je odvod enak 0. Ker je krivulja podana v implicitni obliki, odvajamo kar implicitno in dobimo
$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \quad \text{oziroma} \quad y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}.$$
Ker mora veljati $y' = 0$, velja $-2x - y = 0$ oziroma $y = -2x$.

Iskane točke morajo ležati na krivulji $x^2 + xy + y^2 = 3$ in hkrati torej zadoščati $y = -2x$, kar je sistem dveh enačb z dvema neznankama. Tako dobimo (ko y iz druge enačbe vstavimo v prvo):
$$x^2 + x(-2x) + (-2x)^2 = 3 \quad \text{oziroma} \quad x^2 = 1$$
oziroma $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$. Pripadajoči y koordinati točk dobimo iz enačbe $y = -2x$, zato sta iskani točki $T_1(1, -2)$ in $T_2(-1, 2)$.

5. Izračunajte prostornino telesa, ki nastane, če krivuljo
$$y = \sqrt{\frac{2x + 6}{x^2 - 2x + 5}}, \quad 1 \leq x \leq 3$$
zavrtimo okrog x-osi.

Rešitev. Računajmo z uporabo substitucij $u = x - 1$ in $t = u^2 + 4$:
$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^3 y^2\,dx = \pi \int_1^3 \frac{2x + 6}{x^2 - 2x + 5}\,dx \\
&= \pi \int_1^3 \frac{2(x-1) + 8}{(x-1)^2 + 4}\,dx = \pi \int_0^2 \frac{2u + 8}{u^2 + 4}\,du \\
&= \pi \left[\int_0^2 \frac{2u}{u^2 + 4}\,du + \int_0^2 \frac{8}{u^2 + 4}\,du \right] \\
&= \pi \left[\int_4^8 \frac{dt}{t} + \int_0^2 \frac{8}{u^2 + 4}\,du \right] \\
&= \pi \left[\log|t| \Big|_4^8 + \frac{8}{2} \arctan \frac{u}{2} \Big|_0^2 \right] \\
&= \pi \left(\log 8 - \log 4 + 4 \arctan 1 - 4 \arctan 0 \right) = \pi \left(\log \frac{8}{4} + 4\,\frac{\pi}{4} \right) \\
&= \pi(\log 2 + \pi)
\end{aligned}$$