IZPIT IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

18. junij 2014

1. Ugotovite, koliko členov zaporedja s splošnim členom $a_n = \dfrac{2n^2-3}{n^2+1}$, se od limite razlikuje za več kot $\frac{1}{100}$.

   Rešitev:

   Limita zaporedja je $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3}{n^2+1} = 2$. Rešujemo neenačbo $|a_n - a| > \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n^2-3}{n^2+1} - 2\right| &> \frac{1}{100} \\
\frac{5}{n^2+1} &> \frac{1}{100} \\
n^2 &< 499 \\
n &\leq 22
\end{aligned}$$

   Takih členov je 22.

2. Dani sta funkciji $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 4\sqrt{x}$.

   a) Poiščite presečišča teh dveh krivulj.

   b) Določite vse kote, pod katerimi se ti dve krivulji sekata.

   c) Izračunajte ploščino območja, ki ga omejujeta grafa danih funkcij.

   Rešitev:

   a) Funkcijska predpisa izenačimo in kvadriramo, da dobimo enakost $x^4 = 64x$. Razstavimo in dobimo $x(x-4)(x^2+4x+16) = 0$. Presečišči sta $T_1(0,0)$ in $T_2(4,8)$.

   b) Funkciji odvajamo in dobimo $y' = x$ in $y' = \frac{2}{\sqrt{x}}$. Kot izračunamo za vsako presečišče posebej po formuli $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 k_2}$. V točki $T_1(0,0)$ dobimo

$$k_1 = 0, k_2 = \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2},$$

   v točki $T_2(4,8)$ pa

$$k_1 = 4, k_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \mathrm{arctg}\frac{3}{5}.$$

   c) Ploščino izračunamo z integralom

$$p = \int_0^4 \left(4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}$$

3. Izračunajte integrala

   a) $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x,$

   b) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^2 x\,\mathrm{d}x.$

Rešitev:

a) Podintegralno funkcijo razbijemo na parcialne ulomke

$$\frac{5x^2+3x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Iz primerjave koeficientov dobimo sistem $A+B=5$, $A-B+C=3$ in $A-C=1$, ki ima rešitev $A=3$, $B=2$ in $C=2$. Sledi

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2+3x+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{3}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\ln|x-1| + \ln|x^2+x+1| + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3} + K.\end{aligned}$$

Pri drugem in tretjem integralu uporabimo substituciji $t = x^2+x+1$ in $t = x+\frac{1}{2}$.

b) Integral izračunamo z uporabo integracije per partes, kjer izberemo $u = x$ in $\mathrm{d}v = \cos^2 x\,\mathrm{d}x$. Velja $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ in

$$v = \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}.$$

Sledi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

4. Katero izmed naslednjih števil reši enačbo $z^3 = 8\mathrm{i}$?

a) $-8\mathrm{i}$ b) $2\mathrm{i}$ $\boxed{\text{c)}}$ $-2\mathrm{i}$ d) $\mathrm{i}+1$ e) $8\mathrm{i}$

5. Katera izmed naštetih vrst je konvergentna?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1}$ $\boxed{\text{b)}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+5}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+5}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$

6. Katera izmed danih funkcij je odvedljiva na celi realni osi?

a) $|x+1|$ b) $\frac{2}{x-1}$ c) $\tan(x)+1$ d) $\log(2+x)$ $\boxed{\text{e)}}$ $\mathrm{e}^{\sin x}$

7. Koliko stacionarnih točk ima funkcija $f(x) = 5\sin(2x)$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 $\boxed{\text{e)}}$ ∞

8. Katera izmed naštetih trditev ne velja?

a) Zaporedje, ki je naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno.

b) Polinom tretje stopnje ima vsaj eno realno ničlo.

c) V ničlah lihe stopnje funkcija spremeni predznak.

$\boxed{\text{d)}}$ V stacionarnih točkah vedno nastopi lokalni ekstrem.

e) Polinomi so povsod zvezne funkcije.