1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

14. november 2003

1. [15T] Reši neenačbo in rešitev zapiši kot interval oziroma unijo intervalov:

$$\left|\frac{2x-1}{x}\right| < 2.$$

Rešitev:
Rešiti moramo
$$-2 < \tfrac{2x-1}{x} < 2,$$
pri čemer je $x \neq 0$. Oglejmo si prvo neenačbo:

$$\begin{aligned} -2 &< \tfrac{2x-1}{x} \\ -2x^2 &< 2x^2 - x \\ 4x^2 - x &> 0 \\ x(4x-1) &> 0 \end{aligned}$$

Prva neenačba ima rešitev na intervalu $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$. Oglejmo si še drugo neenačbo:

$$\begin{aligned} \tfrac{2x-1}{x} &< 2 \\ 2x^2 - x &< 2x^2 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Rešitev druge enačbe je interval $(0, \infty)$. V obeh primerih smo množili z x^2, da se je znak neenakosti ohranil. Skupna rešitev prvotne neenačbe je presek rešitev prve in druge neenačbe. Rešitev je torej interval $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$.

2. [15T] Poišči vse rešitve enačbe:

$$z^3 + 2 + 2i\sqrt{3} = 0.$$

Rešitev:
Enačbo
$$z^3 = -2 - 2i\sqrt{3}$$
zapišemo v polarni obliki. Kompleksno število v polarni obliki zapišemo kot

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Leva stran se tako glasi:
$$z^3 = |z|^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi).$$
Sedaj je potrebno v polarni obliki zapisati še število $-2 - 2i\sqrt{3}$.
Izračunamo oba argumenta, to je oddaljenost od izhodišča in kot: $r = 4$, $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. Sledi:

$$-2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3}\right).$$

Dobimo enačbo:
$$|z|^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi) = 4\left(\cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3}\right).$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enaka polmera in enaka kosinusa kotov. Dobimo dve enačbi, in sicer:

$$|z|^3 = 4 \quad in \quad \cos(3\phi) = \cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right).$$

Rešitev prve enačbe je

$$|z| = \sqrt[3]{4},$$

za rešitev druge pa se spomnimo, kdaj sta dva kosinusa enaka. To je tedaj, ko se argumenta razlikujeta za večkratnik periode, to je za $k \cdot 2\pi$. Dobimo:

$$\begin{aligned} 3\phi &= \tfrac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\ \phi_k &= \tfrac{4\pi}{9} + \tfrac{2k\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zanimajo nas trije koti, in sicer:

$$\phi_0 = \tfrac{4\pi}{9}, \quad \phi_1 = \tfrac{10\pi}{9}, \quad \phi_2 = \tfrac{16\pi}{9}.$$

Rešitev zapišemo v obliki:

$$z_k = |z|(\cos\phi_k + i\sin\phi_k).$$

Enačba ima tedaj tri rešitve:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\tfrac{4\pi}{9} + i\sin\tfrac{4\pi}{9}\right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\tfrac{10\pi}{9} + i\sin\tfrac{10\pi}{9}\right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\tfrac{16\pi}{9} + i\sin\tfrac{16\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

3. [10T] Izračunaj limito zaporedja, podanega s splošnim členom:

$$a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+7} - \sqrt{n}).$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+7} - \sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+7} - \sqrt{n})(\sqrt{n+7} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(n+7-n)}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n}} = 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n}} \\ &= 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{7}{n}} + 1} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

4. [10T] Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n)!}$$

konvergentna? Odgovor utemelji.

Rešitev:

Za dokaz konvergence vrste uporabimo kvocientni kriterij:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)\cdot(2n)!}{(2(n+1))!\cdot 2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 \end{aligned}$$

Ker je $q < 1$, je vrsta konvergentna.