

MATEMATIKA I - 1. kolokvij

Univerzitetni študij

17. 11. 2004

1. Skiciraj množico

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y - 1 \geq 0 \text{ ali } x^2 + y^2 + 2(x - y) < 2\} .$$

[10 točk]

Meji množice sta premica $y = 2x - 1$ in $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, krožnica s središčem v $(-1, 1)$ in polmerom 2. Rešitev je tako **unija** notranjosti krožnice (brez meje) in polravnine pod premico (z mejo).

2. Poišči in izpiši vse rešitve enačbe

$$z^5 + \sqrt{\frac{1}{2}}z + i\sqrt{\frac{3}{2}}z = 0 .$$

[15 točk]

Izpostavimo z in dobimo

$$z(z^4 + \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}) = 0 .$$

Ena rešitev je tako $z = 0$, druge štiri pa dobimo iz enačbe

$$z^4 = -\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) .$$

Rešitve te enačbe lahko zapišemo kot

$$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) ,$$

kjer $k = 0, 1, 2, 3$. Rešitve so tako $z_0 = \sqrt[8]{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = \sqrt[8]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$, $z_1 = \sqrt[8]{2}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = \sqrt[8]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$, $z_2 = \sqrt[8]{2}(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = \sqrt[8]{2}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$, $z_3 = \sqrt[8]{2}(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}) = \sqrt[8]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$ in $z_4 = 0$.

3. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{n^3 - n}{n^3 - n - 1} \right)^{n - n^3} .$$

[10 točk]

Najprej delimo ulomek v osnovi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - n}{n^3 - n - 1} \right)^{n - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3 - n - 1} \right)^{n - n^3}.$$

Uvedemo novo spremenljivko $k = n^3 - n - 1$. Opazimo še, da $k \rightarrow \infty$, ko $n \rightarrow \infty$ in $n - n^3 = -k - 1$. Torej je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3 - n - 1} \right)^{n - n^3} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-k-1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-k} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-1} \\ &= e^{-1} \cdot 1 \\ &= e^{-1}. \end{aligned}$$

4. Določi vse $a \in \mathbb{R}$, za katere velja enakost

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n a^n}{10^n} = \frac{10a}{3}.$$

Odgovor utemelji!

[15 točk]

Opazimo, da je $a = 0$ rešitev enačbe. V primeru, ko je $a \neq 0$ pa je vrsta na levi (netivialna) geometrijska vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n a^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3a}{10} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3a}{10} \right)^{n-1}.$$

V primeru, ko je $\left| \frac{3a}{10} \right| < 1$, je vsota te vrste $\frac{1}{1 - \frac{3a}{10}}$. Dobimo kvadratno enačbo

$$\frac{1}{1 - \frac{3a}{10}} = \frac{10a}{3},$$

oziroma

$$3a^2 - 10a + 3 = 0,$$

ki ima rešitvi $a_1 = 3$ in $a_2 = \frac{1}{3}$. Preverimo še, da je $\left| \frac{3a_1}{10} \right| < 1$ in $\left| \frac{3a_2}{10} \right| < 1$. Rešitve naloge so tako 0 , $\frac{1}{3}$ in 3 .