MATEMATIKA I - 2. kolokvij

Univerzitetni študij

5. 1. 2005

1. Funkciji

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$$

določite ničle, pole, asimptoto, lokalne ekstreme, točko v kateri graf seka asimptoto in nato v isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x)$ in $ln(f(x))$.

[15 točk]

Ničla je 0 (druge stopnje), pol pa 1 (tudi druge stopnje). Izračunamo

$$\frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = 1 + \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1} ,$$

iz česar razberemo, da je asimptota $y = 1$. Graf jo seka pri $x = \frac{1}{2}$. Določimo še

$$f'(x) = \frac{2x(1 - x)}{(x - 1)^4} .$$

Vidimo, da je edina kritična točka pri $x = 0$, saj v 1 funkcija ni definirana. Pred 0 je odvod negativen (torej funkcija pada), po 0 pa je odvod pozitiven (funkcija narašča). Torej je v točki $(0, 0)$ lokalni minimum.

2. Poišči tisto tangento na graf funkcije

$$f(x) = e^{2x} - x ,$$

ki je vzporedna z $y + x + 1 = 0$.

[10 točk]

Smerni koeficient tangente mora biti -1, saj je tangenta vzporedna s premico $y = -x - 1$. Torej mora veljati $f'(x) = 2e^{2x} - 1 = -1$, oziroma $e^{2x} = 0$. Taka tangenta torej ne obstaja.

3. Poiščite nedoločeni integral funkcije

$$f(x) = x^2 e^{2x} + \frac{2x}{x^2 + 4} .$$

[15 točk]

Najprej izračunamo

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C .
\end{aligned}$$

V drugem sumandu vpeljemo novo spremenljivko $t = x^2 + 4$. Dobimo

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{x^2+4} dx &= \int \frac{1}{t} dt \\
&= \ln|t| + C \\
&= \ln(x^2+4) + C \ .
\end{aligned}$$

Rešitev je

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + \ln(x^2+4) + C \ .$$

4. Določite ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x - 3} \ ,$$

$x = 1$ in $y = 0$.

[10 točk]

Vidimo, da je $f(x)$ na $(0, 1)$ negativna, torej je

$$\begin{aligned}
P &= -\int_0^1 \frac{x}{x^2-2x-3} dx \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-3} \right) dx \\
&= -\frac{1}{4} \left[\ln|x+1| + 3\ln|x-3| \right]_0^1 \\
&= \frac{3}{4} \ln 3 - \ln 2 \ .
\end{aligned}$$