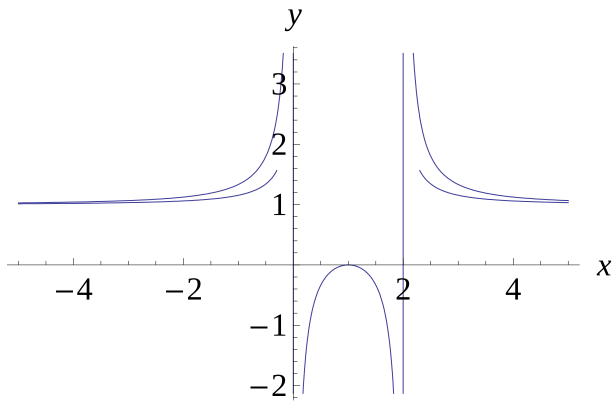
2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

10. januar 2006

1. [25T] Določi ničle, pole, asimptoto ter ekstreme funkcije
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x}.$$
V isti koordinatni sistem nato nariši graf funkcije $f(x)$ in skiciraj graf $\sqrt{f(x)}$.

Rešitev:
Ker je $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, dobimo dvojno ničlo: $x_{1,2} = 1$. Ker je $x^2 - 2x = x(x-2)$, dobimo dva pola prve stopnje: $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$. Ker je stopnja polinoma v števcu enaka stopnji polinoma v imenovalcu, dobimo vodoravno asimptoto, in sicer $y = 1$, ki je ne sekamo. Sedaj izračunajmo še ekstreme. Za to potrebujemo prvi odvod funkcije $f(x)$.
$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x) - (x^2-2x+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{2-2x}{(x^2-2x)^2}$$
Stacionarne točke dobimo tam, kjer je prvi odvod enak nič, torej v točki $x = 1$. Vrednost funkcije v tej točki je: $f(1) = 0$ in v tej točki imamo lokalni maksimum.
Definicijsko območje funkcije $g(x) = \sqrt{f(x)}$ je $D_g = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (2, \infty)$.



Slika 1: Grafa funkcij $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x}$ in $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

2. [25T] Valjasta posoda brez pokrova ima prostornino 8π. Določi polmer osnovne ploskve in višino posode tako, da bo imela najmanjšo površino.

Rešitev:
Volumen valja izračunamo s pomočjo formule $V = \pi r^2 \cdot v$. Od tod dobimo zvezo med r in v, saj velja:
$$V = \pi r^2 \cdot v = 8\pi \Rightarrow v = \tfrac{8}{r^2}.$$
Površino posode dobimo po formuli $P = 2\pi r \cdot v + \pi r^2$. Torej je
$$P(r) = \tfrac{16\pi}{r} + \pi r^2.$$
Odvajamo in dobimo
$$P'(r) = -\tfrac{16\pi}{r^2} + 2\pi r = \tfrac{2\pi(r^3-8)}{r^2} = 0.$$
Zato je $r^3 = 8$, torej $r = 2$ in $v = 2$. Površina je tedaj enaka 12π.

3. [25T] Izračunaj

$$\int \left(e^{2x} \cos x + \frac{e^x}{e^{2x}+1} \right) dx.$$

Rešitev:
Integral najprej razdelimo na dva dela.
Prvi integral rešimo s pomočjo integriranja per partes: $u = \cos x$, $dv = e^{2x}dx$, torej $du = -\sin x dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ in dobimo:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos x dx &= \tfrac{1}{2}e^{2x} \cos x + \tfrac{1}{2} \int e^{2x} \sin x dx \\ &= \tfrac{1}{2}e^{2x} \cos x + \tfrac{1}{4}e^{2x} \sin x - \tfrac{1}{4} \int e^{2x} \cos x dx \end{aligned}$$

Drugo enakost smo dobili prav tako z integriranjem per partes: $u = \sin x$, $dv = e^{2x}dx$, torej $du = \cos x dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Iz gornje enačbe sedaj dobimo:

$$\tfrac{5}{4} \int e^{2x} \cos x dx = \tfrac{1}{2}e^{2x} \left(\cos x + \tfrac{1}{2} \sin x \right),$$

in zato

$$\int e^{2x} \cos x dx = \tfrac{2}{5}e^{2x} \left(\cos x + \tfrac{1}{2} \sin x \right) + C.$$

Drugi integral rešimo s pomočjo uvedbe nove spremenljivke: $t = e^x$, $dt = e^x dx$.

$$\int \tfrac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \tfrac{dt}{t^2+1} = \arctan t = \arctan e^x + C$$

Torej je:

$$\int \left(e^{2x} \cos x + \tfrac{e^x}{e^{2x}+1} \right) dx = \tfrac{2}{5}e^{2x} \left(\cos x + \tfrac{1}{2} \sin x \right) + \arctan e^x + C$$

4. [25T] Funkcijo

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 - x}}$$

zavrtimo okoli x-osi na intervalu $[2, 3]$. Izračunaj prostornino nastale vrtenine.

Rešitev:
Volumen rotacijskega telesa izračunamo s pomočjo formule:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

V našem primeru ($a = 2$, $b = 3$) dobimo:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^3 \left(\sqrt{\tfrac{1}{x^2-x}} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_2^3 \left(-\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \pi \left(-\log |x| + \log |x-1| \right) \Big|_2^3 \\ &= \pi \left(-\log 3 + \log 2 + \log 2 - \log 1 \right) = \pi \log \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Ulomek $\frac{1}{x^2-x}$ razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x - A}{x^2 - x}.$$

Iz enačb $A + B = 0$ in $-A = 1$, takoj dobimo $A = -1$ in $B = 1$.
Upoštevali smo tudi, da je $\log 1 = 0$.