REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Reši neenačbo

$$|-2|x+1|+1|<1$$

in rešitev zapiši kot interval oziroma kot unijo intervalov.

Najprej ločimo dva primera:

- $x+1 \geq 0$ ($x \geq -1$), *ko dobimo neenačbo* $|-2(x+1)+1|<1$ *oz.* $|-2x-1|<1$, *in*
- $x+1<0$ ($x<-1$), *ko dobimo neenačbo* $|2(x+1)+1|<1$ *oz.* $|2x+3|<1$.

V prvem primeru ($x \geq -1$ *in* $|-2x-1|<1$*) ločimo dva podprimera:*

- $-2x-1 \geq 0$ ($x \leq -\frac{1}{2}$), *ko dobimo neenačbo* $-2x-1<1$ *oz.* $x>-1$ *in prvo delno rešitev* $R_1 : (-1,-\frac{1}{2}]$, *ter*
- $-2x-1<0$ ($x>-\frac{1}{2}$), *ko dobimo neenačbo* $2x+1<1$ *oz.* $x<0$ *in drugo delno rešitev* $R_2 : (-\frac{1}{2},0)$.

V drugem primeru ($x<-1$ *in* $|2x+3|<1$*) spet ločimo dva podprimera:*

- $2x+3 \geq 0$ ($x \geq -\frac{3}{2}$), *ko dobimo neenačbo* $2x+3<1$ *oz.* $x<-1$ *in tretjo delno rešitev* $R_3 : [-\frac{3}{2},-1)$, *ter*
- $2x+3<0$ ($x<-\frac{3}{2}$), *ko dobimo neenačbo* $-2x-3<1$ *oz.* $x>-2$ *in četrto delno rešitev* $R_4 : (-2,-\frac{3}{2})$.

Rešitev neenačbe je unija intervalov, ki smo jih dobili kot delne rešitve:

$$R : (-1,-\frac{1}{2}] \cup (-\frac{1}{2},0) \cup [-\frac{3}{2},-1) \cup (-2,-\frac{3}{2}) = (-2,-1) \cup (-1,0) = (-2,0) - \{-1\}.$$

Naloga 2 (25 točk)

Poišči vse rešitve enačbe

$$z^3 = (-1+i)^2.$$

Obe strani enačbe pretvorimo v polarno obliko:

leva stran: $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ *in po Moivrovi formuli* $z^3 = r^3(\cos(3\phi) + i\sin(3\phi))$,

desna stran: $(-1+i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$.

Dobimo enačbo

$$r^3(\cos(3\phi) + i\sin(3\phi)) = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}),$$

iz katere sledi:

$$r^3 = 2 \quad oz. \quad r = \sqrt[3]{2},$$

$$3\phi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad oz. \quad \phi = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}, \ k = 0, 1, 2.$$

Rešitev enačbe se zato glasi takole:

$$z = \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3})), \ k = 0, 1, 2.$$

Zapišimo vse tri rešitve še v kartezičnih koordinatah:

$$k = 0: \ z_0 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \sqrt[3]{2}(0 + i) = i\sqrt[3]{2},$$

$$k = 1: \ z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}),$$

$$k = 2: \ z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}).$$

Naloga 3 (25 točk)

Poišči infimum in supremum ter najmanjši in največji člen (če obstajata) zaporedja s splošnim členom

$$a_n = 4n^2 - 21n + 2006.$$

Kdaj zaporedje narašča in kdaj pada? Odgovor utemelji!

Najprej analizirajmo monotonost zaporedja:

$$a_{n+1} - a_n = (4(n+1)^2 - 21(n+1) + 2006) - (4n^2 - 21n + 2006) = 8n - 17 = \begin{cases} < 0, & n \leq 2 \\ > 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

Zaporedje torej strogo pada pri $n = 1, 2$ *in strogo narašča pri* $n \geq 3$*. Velja:*

$$a_1 > a_2 > a_3$$

$$a_3 < a_4 < a_5 < \ldots$$

Najmanjši člen in hkrati infimum zaporedja je zato $a_3 = 4 \cdot 3^2 - 21 \cdot 3 + 2006 = 1979$. *Zaporedje je navzgor neomejeno, zato največji člen ne obstaja, supremum pa je enak* ∞.

Naloga 4 (25 točk)

Ali vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!\ n^n}{(3n)!}$$

konvergira? Odgovor utemelji!

Uporabimo lahko kvocientni kriterij:

$$\begin{aligned}
q &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(4n+4)!\ (n+1)^{n+1}}{(3n+3)!}}{\frac{(4n)!\ n^n}{(3n)!}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!\ (3n)!\ (n+1)^{n+1}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!\ (4n)!\ n^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(n+1)(n+1)^n}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)n^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \cdot \lim_{n\to\infty}(\tfrac{n+1}{n})^n = \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{256n^5+\cdots}{27n^3+\cdots} \cdot \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n = \infty \cdot e \ = \ \infty \ > \ 1
\end{aligned}$$

Ker je $q > 1$, po kvocientnem kriteriju sledi, da vrsta divergira.

REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Reši neenačbo

$$|3|x-1|-2|<1$$

in rešitev zapiši kot interval oziroma kot unijo intervalov.

Najprej ločimo dva primera:

- $x-1\geq 0$ $(x\geq 1)$, *ko dobimo neenačbo* $|3(x-1)-2|<1$ *oz.* $|3x-5|<1$, *in*
- $x-1<0$ $(x<1)$, *ko dobimo neenačbo* $|-3(x-1)-2|<1$ *oz.* $|-3x+1|<1$.

V prvem primeru ($x\geq 1$ *in* $|3x-5|<1$*) ločimo dva podprimera:*

- $3x-5\geq 0$ $(x\geq \frac{5}{3})$, *ko dobimo neenačbo* $3x-5<1$ *oz.* $x<2$ *in prvo delno rešitev* $R_1:[\frac{5}{3},2)$, *ter*
- $3x-5<0$ $(x<\frac{5}{3})$, *ko dobimo neenačbo* $-(3x-5)<1$ *oz.* $x>\frac{4}{3}$ *in drugo delno rešitev* $R_2:(\frac{4}{3},\frac{5}{3})$.

V drugem primeru ($x<1$ *in* $|-3x+1|<1$*) spet ločimo dva podprimera:*

- $-3x+1\geq 0$ $(x\leq \frac{1}{3})$, *ko dobimo neenačbo* $-3x+1<1$ *oz.* $x>0$ *in tretjo delno rešitev* $R_3:(0,\frac{1}{3}]$, *ter*
- $-3x+1<0$ $(x>\frac{1}{3})$, *ko dobimo neenačbo* $-(-3x+1)<1$ *oz.* $x<\frac{2}{3}$ *in četrto delno rešitev* $R_4:(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

Rešitev neenačbe je unija intervalov, ki smo jih dobili kot delne rešitve:

$$R:[\frac{5}{3},2)\cup(\frac{4}{3},\frac{5}{3})\cup(0,\frac{1}{3}]\cup(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=(0,\frac{2}{3})\cup(\frac{4}{3},2).$$

Naloga 2 (25 točk)

Poišči vse rešitve enačbe

$$z^3=(-1-i)^2.$$

Obe strani enačbe pretvorimo v polarno obliko:

leva stran: $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ *in po Moivrovi formuli* $z^3 = r^3(\cos(3\phi) + i\sin(3\phi))$,

desna stran: $(-1-i)^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

Dobimo enačbo

$$r^3(\cos(3\phi) + i\sin(3\phi)) = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}),$$

iz katere sledi:

$$r^3 = 2 \quad \textit{oz.} \quad r = \sqrt[3]{2},$$

$$3\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \textit{oz.} \quad \phi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \ k = 0, 1, 2.$$

Rešitev enačbe se zato glasi takole:

$$z = \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})), \ k = 0, 1, 2.$$

Zapišimo vse tri rešitve še v kartezičnih koordinatah:

$$k = 0: \ z_0 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}),$$

$$k = 1: \ z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}),$$

$$k = 2: \ z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = \sqrt[3]{2}(0 - i) = -i\sqrt[3]{2}.$$

Naloga 3 (25 točk)

Poišči infimum in supremum ter najmanjši in največji člen (če obstajata) zaporedja s splošnim členom

$$a_n = 3n^2 - 17n + 2006.$$

Kdaj zaporedje narašča in kdaj pada? Odgovor utemelji!

Najprej analizirajmo monotonost zaporedja:

$$a_{n+1} - a_n = (3(n+1)^2 - 17(n+1) + 2006) - (3n^2 - 17n + 2006) = 6n - 14 = \begin{cases} < 0, & n \leq 2 \\ > 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

Zaporedje torej strogo pada pri $n = 1, 2$ *in strogo narašča pri* $n \geq 3$. *Velja:*

$$a_1 > a_2 > a_3$$

$$a_3 < a_4 < a_5 < \dots$$

Najmanjši člen in hkrati infimum zaporedja je zato $a_3 = 3 \cdot 3^2 - 17 \cdot 3 + 2006 = 1982$. *Zaporedje je navzgor neomejeno, zato največji člen ne obstaja, supremum pa je enak* ∞.

Naloga 4 (25 točk)

Ali vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!\ n^n}{(4n)!}$$

konvergira? Odgovor utemelji!

Uporabimo lahko kvocientni kriterij:

$$\begin{aligned}
q &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(3n+3)!\ (n+1)^{n+1}}{(4n+4)!}}{\frac{(3n)!\ n^n}{(4n)!}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!\ (4n)!\ (n+1)^{n+1}}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!\ (3n)!\ n^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)(n+1)^n}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)n^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \cdot \lim_{n\to\infty} (\tfrac{n+1}{n})^n = \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{27n^4+\cdots}{256n^4+\cdots} \cdot \lim_{n\to\infty} (1+\tfrac{1}{n})^n = \tfrac{27}{256} \cdot e \ < \ 1
\end{aligned}$$

Ker je $q < 1$, po kvocientnem kriteriju sledi, da vrsta konvergira.