REŠITVE A skupina

Naloga 1 (25 točk)
Določi parameter a, tako da bo funkcija f zvezna:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}, & x > 0 \\ a\arctan(1-x), & x \le 0 \end{cases}$$

Funkcija $f(x)$ je zvezna povsod, razen morda v točki $x = 0$, kjer se predpis spremeni. V tej točki izračunamo levo in desno limito.

Leva limita:

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}(a\arctan(1-x)) = a\frac{\pi}{4}.$$

Desna limita:

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 0} f(x) &= \lim_{x\downarrow 0} \tfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\downarrow 0}\left(\tfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} \cdot \tfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}\right) \\ &= \lim_{x\downarrow 0} \tfrac{(x+1)-1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)} = \lim_{x\downarrow 0} \tfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1} = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Z L'Hospitalovim pravilom gre hitreje:

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}}{1} = \frac{1}{3}.$$

Funkcija $f(x)$ bo zvezna v točki $x = 0$, če bosta leva in desna limita v tej točki enaki:

$$a\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}.$$

Veljati torej mora

$$a = \frac{4}{3\pi}.$$

Naloga 2 (25 točk)
Določi definicijsko območje funkcije

$$g(x) = x^3(2 - x\sqrt{x}),$$

nariši njen graf ter določi točke, kjer funkcija $g(x)$ doseže največjo oziroma najmanjšo vrednost na intervalu $[0, 2]$. Kakšni sta največja in najmanjša vrednost funkcije $g(x)$ na intervalu $[0, 2]$?

Funkcija $g(x)$ je definirana za nenegativna realna števila: $D_g = [0, \infty)$. Izračunajmo ničle, lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter obnašanje funkcije $g(x)$ v neskončnosti.

Ničle:

$$x^3(2 - x\sqrt{x}) = 0$$
$$x_{1,2,3} = 0$$
$$x_4 = \sqrt[3]{4}$$

Lokalni ekstremi (v notranjosti definicijskega območja):

$$g'(x) = 3x^2(2 - x^{\frac{3}{2}}) + x^3(-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}) = 6x^2 - \frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}} = \frac{3}{2}x^2(4 - 3x\sqrt{x})$$
$$x_5 = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{16}{9}} \quad \textit{stacionarna točka}$$
$$g''(x) = 12x - \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = 12x - \frac{63}{4}x^{\frac{5}{2}}$$
$$g''(x_5) = g''(\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}) = 12\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{63}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{3}} = -9\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} < 0$$
$$\implies \textit{v } x_5 \textit{ je lokalni maksimum}$$
$$g(x_5) = g(\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}) = \frac{16}{9}(2 - \frac{4}{3}) = \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27}$$

Intervali naraščanja in padanja:

$$g'(x) = \frac{3}{2}x^2(4 - 3x^{\frac{3}{2}}) > 0 \iff 0 \le x < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{16}{9}} \quad \textit{funkcija narašča}$$
$$g'(x) = \frac{3}{2}x^2(4 - 3x^{\frac{3}{2}}) < 0 \iff x > \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{16}{9}} \quad \textit{funkcija pada}$$

Obnašanje funkcije v neskončnosti:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^{\frac{9}{2}} + 2x^3) = -\infty$$

Funkcija $g(x)$ doseže na intervalu $[0, 2]$ največjo vrednost v lokalnem maksimumu:

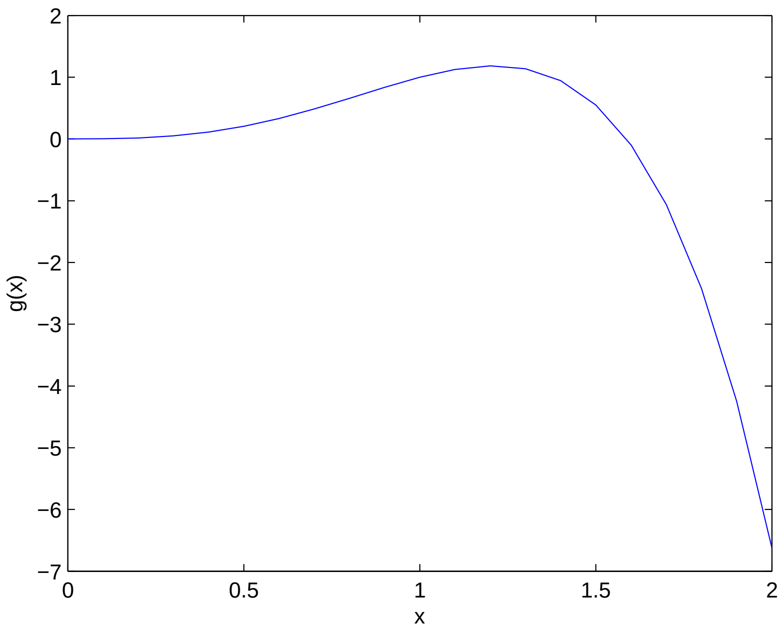
$$g_{max} = g(x_5) = \frac{32}{27}$$

Najmanjšo vrednost na intervalu $[0, 2]$ funkcija doseže v krajišču $x = 2$:

$$g_{min} = g(2) = 8(2 - 2\sqrt{2}) = 16(1 - \sqrt{2})$$

Naloga 3 (25 točk)

Izračunaj nedoločena integrala:



a.) $\displaystyle\int \cos(\cos x)\sin x\,dx$

b.) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$

Prvi integral rešimo z uvedbo nove spremenljivke, drugega pa z razcepom integrirane racionalne funkcije na parcialne ulomke:

a.) $\displaystyle\int \cos(\cos x)\sin x\,dx = -\int \cos t\,dt = -\sin t + C = -\sin(\cos x) + C$

Uvedli smo novo spremenljivko: $t = \cos x \implies dt = -\sin x\,dx$.

b.) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3-x^2+2x-2}\,dx = \int \Big(\frac{\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}}{x^2+2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x-1}\Big)\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx$

$= \frac{1}{6}\ln|x^2+2| + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\ln|x-1| + E$

Racionalno funkcijo $\displaystyle\frac{x-2}{x^3-x^2+2x-2}$ *smo razcepili na parcialne ulomke:*

$\displaystyle\frac{x-2}{x^3-x^2+2x-2} = \frac{x-2}{x^2(x-1)+2(x-1)} = \frac{x-2}{(x^2+2)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{C}{x-1}$

$\displaystyle = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+2)}{(x^2+2)(x-1)}$

Izenačili smo števca dobljenih racionalnih funkcij

$x-2 = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+2) = Ax^2 + Bx - Ax - B + Cx^2 + 2C$

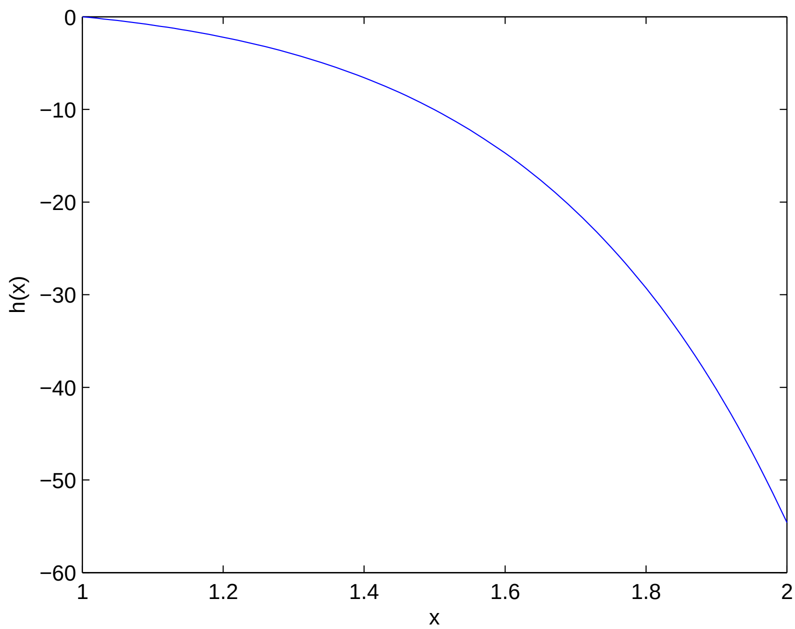
in primerjali koeficiente pri istih potencah spremenljivke x:

koeficient pri x^2*:* $\quad 0 = A + C$
koeficient pri x*:* $\quad 1 = B - A$
koeficient pri x^0*:* $\quad -2 = -B + 2C$
Rešitev sistema treh linearnih enačb za tri neznanke je: $A = \frac{1}{3},\ B = \frac{4}{3},\ C = -\frac{1}{3}$.
V integral $\int \frac{x}{x^2+2}\,dx$ *smo uvedli še novo spremenljivko* $t = x^2 + 2 \implies dt = 2x\,dx$, *da smo dobili:* $\int \frac{x}{x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + D = \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + D$.

Naloga 4 (25 točk)

Izračunaj ploščino lika, omejenega z grafom funkcije $h(x) = (1-x)e^{2x}$, abscisno osjo ter premicama $x = 1$ in $x = 2$.

Lik, ki ga omejujejo graf funkcije $h(x) = (1-x)e^{2x}$*, ki je na intervalu* $(1, 2)$ *negativna, abscisna os ter premici* $x = 1$ *in* $x = 2$*, je krivočrtni trikotnik,*



katerega ploščina je enaka določenemu integralu funkcije $-h(x)$*:*
$S = \displaystyle\int_1^2 -(1-x)e^{2x}\,dx = [\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{4}[e^{2x}]_1^2 = \frac{1}{4}e^2(e^2+1).$
Integral smo izračunali z integracijo po delih (per partes):

$$u = x - 1 \implies du = dx$$

$$dv = e^{2x}dx \implies v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

REŠITVE B skupina

Naloga 1 (25 točk)

Določi parameter a, tako da bo funkcija f zvezna:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\arctan x, & x \leq 1 \\ \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

Funkcija $f(x)$ je zvezna povsod, razen morda v točki $x = 1$, kjer se predpis spremeni. V tej točki izračunamo levo in desno limito.

Leva limita:

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\uparrow 1}(\frac{1}{a}\arctan x) = \frac{1}{a}\frac{\pi}{4}.$$

Desna limita:

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 1} f(x) &= \lim_{x\downarrow 1} \tfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{x\downarrow 1}\left(\tfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\cdot\tfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right) \\ &= \lim_{x\downarrow 1}\tfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\downarrow 1}\tfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Z L'Hospitalovim pravilom gre hitreje:

$$\lim_{x\downarrow 1} f(x) = \lim_{x\downarrow 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{x\downarrow 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{1} = \frac{1}{3}.$$

Funkcija $f(x)$ bo zvezna v točki $x = 1$, če bosta leva in desna limita v tej točki enaki:

$$\frac{1}{a}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}.$$

Veljati torej mora

$$a = \frac{3\pi}{4}.$$

Naloga 2 (25 točk)

Določi definicijsko območje funkcije

$$g(x) = x^3(1 - x\sqrt{x}),$$

nariši njen graf ter določi točke, kjer funkcija $g(x)$ doseže največjo oziroma najmanjšo vrednost na intervalu $[0, 2]$. Kakšni sta največja in najmanjša vrednost funkcije $g(x)$ na intervalu $[0, 2]$?

Funkcija $g(x)$ je definirana za nenegativna realna števila: $D_g = [0, \infty)$. Izračunajmo ničle, lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter obnašanje funkcije $g(x)$ v neskončnosti.

Ničle:

$$x^3(1 - x\sqrt{x}) = 0$$
$$x_{1,2,3} = 0$$
$$x_4 = 1$$

Lokalni ekstremi (v notranjosti definicijskega območja):

$$g'(x) = 3x^2(1 - x^{\frac{3}{2}}) + x^3(-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}) = 3x^2 - \frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}} = \frac{3}{2}x^2(2 - 3x\sqrt{x})$$
$$x_5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \quad \textit{stacionarna točka}$$
$$g''(x) = 6x - \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = 6x - \frac{63}{4}x^{\frac{5}{2}}$$
$$g''(x_5) = g''(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}) = 6\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{63}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{3}} = 6\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{21}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = -\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} < 0$$
$$\Longrightarrow \; \textit{v } x_5 \textit{ je lokalni maksimum}$$
$$g(x_5) = g(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}) = \frac{4}{9}(1 - \frac{2}{3}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

Intervali naraščanja in padanja:

$$g'(x) = \frac{3}{2}x^2(2 - 3x^{\frac{3}{2}}) > 0 \iff 0 \le x < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \quad \textit{funkcija narašča}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2}x^2(2 - 3x^{\frac{3}{2}}) < 0 \iff x > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \quad \textit{funkcija pada}$$

Obnašanje funkcije v neskončnosti:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^{\frac{9}{2}} + x^3) = -\infty$$

Funkcija $g(x)$ doseže na intervalu $[0, 2]$ največjo vrednost v lokalnem maksimumu:

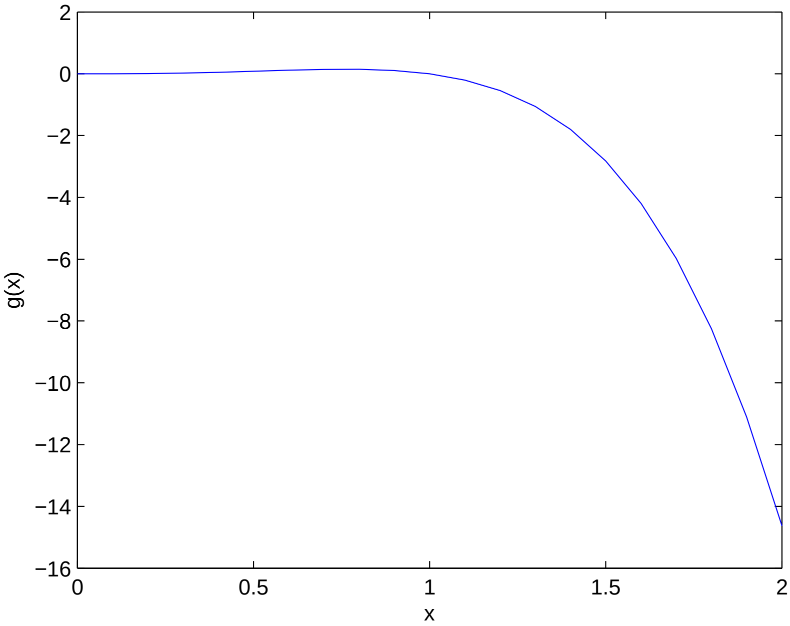
$$g_{max} = g(x_5) = \frac{4}{27}$$

Najmanjšo vrednost na intervalu $[0, 2]$ funkcija doseže v krajišču $x = 2$:

$$g_{min} = g(2) = 8(1 - 2\sqrt{2})$$

Naloga 3 (25 točk)

Izračunaj nedoločena integrala:



a.) $\displaystyle\int \sin(\sin x)\cos x\,dx$

b.) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x-2}\,dx$

Prvi integral rešimo z uvedbo nove spremenljivke, drugega pa z razcepom integrirane racionalne funkcije na parcialne ulomke.

a.) $\displaystyle\int \sin(\sin x)\cos x\,dx = \int \sin t\,dt = -\cos t + C = -\cos(\sin x) + C$

Uvedli smo novo spremenljivko: $t = \sin x \implies dt = \cos x\,dx$.

b.) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}}{x^2+1} + \frac{\frac{4}{5}}{x-2}\right)dx = \frac{1}{5}\int\left(\frac{-4x-3}{x^2+1} + \frac{4}{x-2}\right)dx$

$\displaystyle= -\frac{2}{5}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \frac{3}{5}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{4}{5}\int \frac{1}{x-2}\,dx$

$= -\frac{2}{5}\ln|x^2+1| - \frac{3}{5}\arctan x + \frac{4}{5}\ln|x-2| + E$

Racionalno funkcijo $\displaystyle\frac{x+2}{x^3-2x^2+x-2}$ *smo razcepili na parcialne ulomke:*

$\displaystyle\frac{x+2}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{x+2}{x(x^2+1)-2(x^2+1)} = \frac{x+2}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2}$

$\displaystyle= \frac{(Ax+B)(x-2)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)}$

Izenačili smo števca dobljenih racionalnih funkcij

$x+2 = (Ax+B)(x-2) + C(x^2+1) = Ax^2 + Bx - 2Ax - 2B + Cx^2 + C$

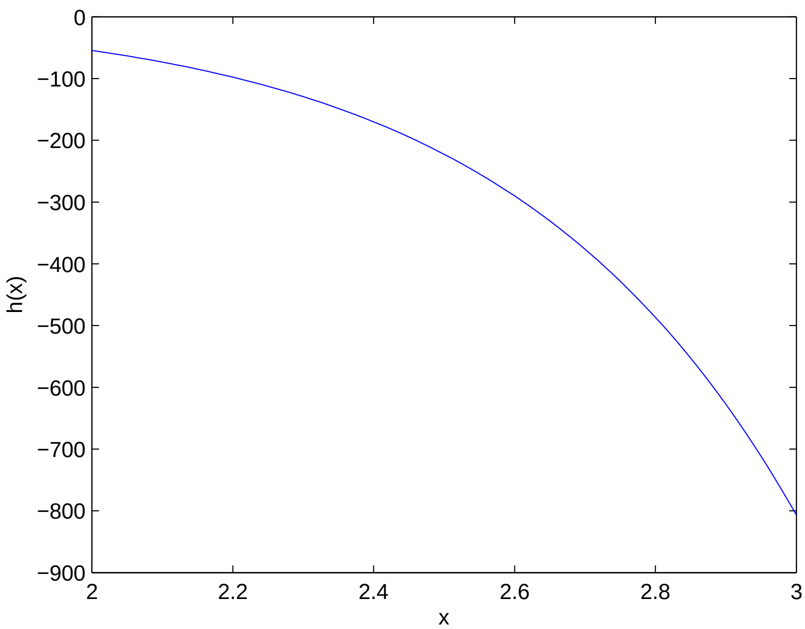
in primerjali koeficiente pri istih potencah spremenljivke x:

koeficient pri x^2*:* $0 = A + C$
koeficient pri x*:* $1 = B - 2A$
koeficient pri x^0*:* $2 = -2B + C$
Rešitev sistema treh linearnih enačb za tri neznanke je: $A = -\frac{4}{5},\ B = -\frac{3}{5},\ C = \frac{4}{5}$.
V integral $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ *smo uvedli še novo spremenljivko* $t = x^2 + 1 \implies dt = 2x\,dx$,
da smo dobili: $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + D = \ln|x^2+1| + D$.

Naloga 4 (25 točk)

Izračunaj ploščino lika, omejenega z grafom funkcije $h(x) = (1-x)e^{2x}$, abscisno osjo ter premicama $x = 2$ in $x = 3$.

Lik, ki ga omejujejo graf funkcije $h(x) = (1-x)e^{2x}$*, ki je na intervalu* $(2,3)$ *negativna, abscisna os ter premici* $x = 2$ *in* $x = 3$*, je krivočrtni trikotnik,*



katerega ploščina je enaka določenemu integralu funkcije $-h(x)$*:*
$S = \int_2^3 -(1-x)e^{2x}\,dx = [\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}]_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 e^{2x}\,dx = e^6 - \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{4}[e^{2x}]_2^3 = \frac{1}{4}e^4(3e^2-1).$
Integral smo izračunali z integracijo po delih (per partes):

$$u = x - 1 \implies du = dx$$

$$dv = e^{2x}dx \implies v = \frac{1}{2}e^{2x}$$