1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

19. november 2007

1. [15T] Poiščite rešitev neenačbe

$$\Big||x-1|+2x+4\Big|<3.$$

Rešitev:
Neenačbo najprej zapišemo v ekvivalentni obliki z dvema neenačbama

$$-3<|x-1|+2x+4<3.$$

1) Najprej rešimo neenačbo $-3<|x-1|+2x+4$.
   i) Ko je $x\geq 1$, dobimo neenačbo $-3<x-1+2x+4$, ki ima rešitev $x>-2$. Torej je rešitev v tem primeru interval $[1,\infty)$.
   ii) Ko je $x<1$, dobimo neenačbo $-3<-x+1+2x+4$, ki ima rešitev $x>-8$. Torej je rešitev v tem primeru interval $(-8,1)$.

   Skupna rešitev je tako interval $(-8,\infty)$.
2) Nato rešimo še neenačbo $|x-1|+2x+4<3$.
   i) Ko je $x\geq 1$, dobimo neenačbo $x-1+2x+4<3$, ki ima rešitev $x<0$. Torej je rešitev v tem primeru prazna.
   ii) Ko je $x<1$, dobimo neenačbo $-x+1+2x+4<3$, ki ima rešitev $x<-2$. Torej je rešitev v tem primeru interval $(-\infty,-2)$.

   Skupna rešitev je tako interval $(-\infty,-2)$.

Prvotna neenačba ima rešitev tam, kjer imata rešitev obe gornji neenačbi, torej na intervalu $(-8,-2)$.

2. [15T] Izračunajte

$$\sqrt[4]{-8\sqrt{3}-8\mathrm{i}}.$$

Rešitev:
Število $z=-8\sqrt{3}-8\mathrm{i}$ najprej zapišemo v polarni obliki (z je v III kvadrantu!):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3\cdot 64+64}=16,\\ \varphi &= \arctan\left(\frac{-8}{-8\sqrt{3}}\right)=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Torej $z=16\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.
Izraz $\sqrt[4]{-8\sqrt{3}-8\mathrm{i}}$ ima štiri rešitve, ki jih dobimo po formuli

$$z_k=r^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4}\right),\qquad k=0,1,2,3.$$

Rešitve so torej:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\frac{7\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{24}\right),\\
z_1 &= 2\left(\cos\frac{19\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{24}\right),\\
z_2 &= 2\left(\cos\frac{31\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\frac{31\pi}{24}\right),\\
z_3 &= 2\left(\cos\frac{43\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\frac{43\pi}{24}\right).
\end{aligned}
$$

3. [10T] Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+2}\right)^{2n^2+1}.$$

Rešitev:

To limito izračunamo s pomočjo limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+2}\right)^{2n^2+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2+2}\right)^{2n^2+1}\\
&= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{6m-3}\\
&= \mathrm{e}^6
\end{aligned}
$$

Napravili smo substitucijo $\frac{1}{m}=\frac{3}{n^2+2}$ oz. $n^2=3m-2$.

4. [10T] Določite konvergenco vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}.$$

Rešitev:

Konvergenco preverimo s kvocientnim kriterijem:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0.$$

Ker je $q<1$, je vrsta konvergentna.

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

19. november 2007

1. [15T] Poiščite rešitev neenačbe

$$\Big||x-2|+3x+1\Big|<4.$$

Rešitev:
Neenačbo najprej zapišemo v ekvivalentni obliki z dvema neenačbama

$$-4<|x-2|+3x+1<4.$$

1) Najprej rešimo neenačbo $-4<|x-2|+3x+1$.
   i) Ko je $x\geq 2$, dobimo neenačbo $-4<x-2+3x+1$, ki ima rešitev $x>-\frac{3}{4}$. Torej je rešitev v tem primeru interval $[2,\infty)$.
   ii) Ko je $x<2$, dobimo neenačbo $-4<-x+2+3x+1$, ki ima rešitev $x>-\frac{7}{2}$. Torej je rešitev v tem primeru interval $(-\frac{7}{2},2)$.

   Skupna rešitev je tako interval $(-\frac{7}{2},\infty)$.
2) Nato rešimo še neenačbo $|x-2|+3x+1<4$.
   i) Ko je $x\geq 2$, dobimo neenačbo $x-2+3x+1<4$, ki ima rešitev $x<\frac{5}{4}$. Torej je rešitev v tem primeru prazna.
   ii) Ko je $x<2$, dobimo neenačbo $-x+2+3x+1<4$, ki ima rešitev $x<\frac{1}{2}$. Torej je rešitev v tem primeru interval $(-\infty,\frac{1}{2})$.

   Skupna rešitev je tako interval $(-\infty,\frac{1}{2})$.

Prvotna neenačba ima rešitev tam, kjer imata rešitev obe gornji neenačbi, torej na intervalu $(-\frac{7}{2},\frac{1}{2})$.

2. [15T] Izračunajte

$$\sqrt[4]{-8\sqrt{3}+8\mathrm{i}}.$$

Rešitev:
Število $z=-8\sqrt{3}+8\mathrm{i}$ najprej zapišemo v polarni obliki (z je v II kvadrantu!):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3\cdot 64+64}=16,\\ \varphi &= \arctan\left(\frac{8}{-8\sqrt{3}}\right)=-\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Torej $z=16\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.
Izraz $\sqrt[4]{-8\sqrt{3}+8\mathrm{i}}$ ima štiri rešitve, ki jih dobimo po formuli

$$z_k=r^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4}\right),\qquad k=0,1,2,3.$$

Rešitve so torej:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{24} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{24}\right),\\
z_1 &= 2\left(\cos\frac{17\pi}{24} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{24}\right),\\
z_2 &= 2\left(\cos\frac{29\pi}{24} + \mathrm{i}\sin\frac{29\pi}{24}\right),\\
z_3 &= 2\left(\cos\frac{41\pi}{24} + \mathrm{i}\sin\frac{41\pi}{24}\right).
\end{aligned}
$$

3. [10T] Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+7}{n^2+3}\right)^{3n^2-2}.$$

Rešitev:

To limito izračunamo s pomočjo limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+7}{n^2+3}\right)^{3n^2-2} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2+3}\right)^{3n^2-2}\\
&= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{12m-11}\\
&= \mathrm{e}^{12}
\end{aligned}
$$

Napravili smo substitucijo $\frac{1}{m} = \frac{4}{n^2+3}$ oz. $n^2 = 4m-3$.

4. [10T] Določite konvergenco vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}.$$

Rešitev:

Konvergenco preverimo s kvocientnim kriterijem:

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot(n+1)!}{n!\cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3} = \infty.$$

Ker je $q > 1$, je vrsta divergentna.