2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

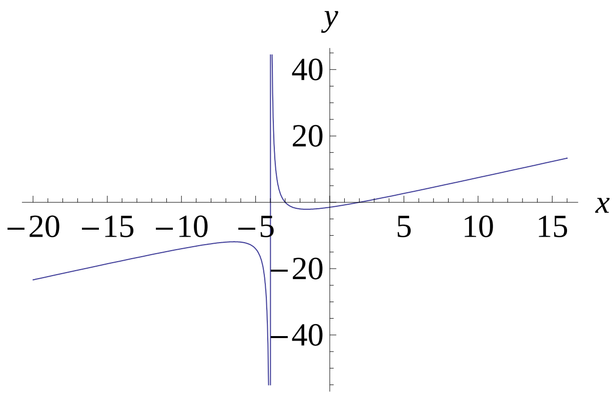
7. januar 2008

1. [15T] Določite ničle, pole, začetno vrednost, asimptoto in ekstreme ter čimbolj natančno narišite graf funkcije
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 4}.$$

Rešitev:

To je racionalna funkcija.
Ničle so rešitve enačbe $x^2 + x - 6 = 0$, torej $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.
Pol je rešitev enačbe $x + 4 = 0$, torej $x = -4$.
Začetna vrednost: $f(0) = -\frac{3}{2}$.
Asimptota je poševna, saj je stopnja števca za ena večja od stopnje imenovalca. Dobimo jo tako da delimo polinoma in dobimo: $y = x - 3$.
Ekstremi - izračunamo odvod:
$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+4) - (x^2 + x - 6)}{(x+4)^2} = \frac{x^2 + 8x + 10}{(x+4)^2}.$$

Odvod je enak 0, ko je $x^2 + 8x + 10 = 0$, torej so stacionarne točke $x_1 = -4 - \sqrt{6}$ in $x_2 = -4 + \sqrt{6}$. Ker je $f'(-7) > 0$ in $f'(-6) < 0$, je v točki $-4 - \sqrt{6}$ lokalni maksimum in podobno ker je $f'(-2) < 0$ in $f'(-1) > 0$, je v točki $-4 + \sqrt{6}$ lokalni minimum.



Slika 1: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+4}$.

2. [10T] Določite enačbo tangente in normale na graf funkcije
$$f(x) = e^{2x} \cos 3x$$
v točki $x_0 = 0$.

Rešitev:

Izračunamo odvod funkcije:
$$f'(x) = 2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x.$$

Smerni koeficient tangente je enak vrednosti odvoda v točki x_0: $k_t = f'(0) = 2$.
Smerni koeficient normale: $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2}$.
Izračunamo še $y_0 = f(x_0) = 1$.
Enačbo tangente dobimo po formuli $y - y_0 = k_t(x - x_0)$, torej $y = 2x + 1$, enačbo normale pa po formuli $y - y_0 = k_n(x - x_0)$, torej $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

3. [15T] Izračunajte integral

$$\int \frac{3x^2 + 5x + 6}{(x+2)(x^2+x+2)}\, dx.$$

Rešitev:
To je integral rcionalne funkcije, ki ga izračunamo s pomočjo nastavka:

$$\int \frac{3x^2 + 5x + 6}{(x+2)(x^2+x+2)}\, dx = A \ln|x+2| + B \ln|x^2+x+2| + C \arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + D.$$

Nastavek odvajamo in dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2 + 5x + 6}{(x+2)(x^2+x+2)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B(2x+1)}{x^2+x+2} + \frac{\frac{2C}{\sqrt{7}}}{1 + \frac{(2x+1)^2}{7}} \\
&= \frac{A}{x+2} + \frac{2Bx + B}{x^2+x+2} + \frac{\frac{C\sqrt{7}}{2}}{x^2+x+2} \\
&= \frac{(A+2B)x^2 + (A + 5B + \frac{C\sqrt{7}}{2})x + 2A + 2B + C\sqrt{7}}{(x+2)(x^2+x+2)}
\end{aligned}$$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}
A + 2B &= 3, \\
A + 5B + \frac{C\sqrt{7}}{2} &= 5, \\
2A + 2B + C\sqrt{7} &= 6,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 2$, $B = \frac{1}{2}$ in $C = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Integral je torej:

$$\int \frac{3x^2 + 5x + 6}{(x+2)(x^2+x+2)}\, dx = 2\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+2| + \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + D.$$

4. [10T] Izračunajte dolžino loka krivulje

$$y = \sqrt{2x^3}$$

na intervalu $0 < x < \frac{2}{3}$.

Rešitev:
Ločno dolžino izračunamo po formuli $s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$.
Ker je $y' = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3}}$ in $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{9x+2}{2}}$, sledi:

$$s = \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{9x+2}{2}}\, dx = \frac{2}{9}\int_1^4 t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{4}{27} t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{28}{27}.$$

Napravili smo substitucijo: $t = \frac{9x+2}{2}$, $dt = \frac{9}{2}dx$. Ko je $x = 0$, je $t = 1$ in ko je $x = \frac{2}{3}$, je $t = 4$.