REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Določite podmnožico realnih števil, ki zadoščajo neenačbi

$$\sqrt{2x^2+x-6} \le \sqrt{x^2+2x}.$$

Zapišimo najprej pogoje, ki jim morajo zadoščati izrazi pod koreni, zato da bodo vsi deli neenačbe definirani (v obsegu realnih števil):

- $2x^2+x-6 \ge 0$:
  To je kvadratna neenačba. Pripadajoča parabola seka abscisno os pri $x_{1,2} = \frac{-1\pm 7}{4}$ *oz.* $x_1 = \frac{3}{2}$ *in* $x_2 = -2$. *Sledi rešitev kvadratne neenačbe:* $x \in (-\infty,-2] \cup [\frac{3}{2},\infty)$.
- $x^2+2x \ge 0$:
  To je kvadratna neenačba. Pripadajoča parabola seka abscisno os pri $x_1 = 0$ *in* $x_2 = -2$. *Sledi rešitev kvadratne neenačbe:* $x \in (-\infty,-2] \cup [0,\infty)$.

Presek obeh pogojev predstavlja podmnožico realnih števil, ki so potencialne rešitve dane neenačbe:

$$\left((-\infty,-2] \cup [\frac{3}{2},\infty)\right) \cap ((-\infty,-2] \cup [0,\infty)) = (-\infty,-2] \cup [\frac{3}{2},\infty).$$

Sedaj začetno neenačbo kvadrirajmo in uredimo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x^2+x-6} &\le \sqrt{x^2+2x},\\
2x^2+x-6 &\le x^2+2x,\\
x^2-x-6 &\le 0,\\
(x-3)(x+2) &\le 0.
\end{aligned}$$

Presečišči parabole in abscisne osi sta v tem primeru $x_1 = 3$ *in* $x_2 = -2$. *Kot rešitev dobimo vsa realna števila iz zaprtega intervala* $[-2,3]$. *Iskana rešitev je presek:*

$$\left((-\infty,-2] \cup [\frac{3}{2},\infty)\right) \cap [-2,3] = \{-2\} \cup [\frac{3}{2},3].$$

Naloga 2 (25 točk)

Poiščite vsa kompleksna števila $z = x+iy$, ki zadoščajo enačbi

$$z^5 + (1+i\sqrt{3})z = 0.$$

Na levi strani lahko izpostavimo z *in dobimo:*

$$z(z^4 + 1 + i\sqrt{3}) = 0.$$

Sedaj sledi

$$z = 0 \quad ali \quad z^4 + 1 + i\sqrt{3} = 0$$

in zato prva rešitev enačbe $z_1 = 0$. *Naslednje štiri rešitve dobimo iz enačbe*

$$z^4 = -1 - i\sqrt{3}.$$

To enačbo bomo rešili z uporabo polarnega zapisa (in DeMoivreove formule) kompleksnih števil:

$$\begin{aligned}
z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) \quad &\Rightarrow \quad z^4 = |z|^4(\cos(4\phi) + i\sin(4\phi)) \\
-1 - i\sqrt{3} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad &\Rightarrow \quad r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \\
&\quad\quad \varphi = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \\
&\quad\quad -1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})
\end{aligned}$$

Pri tem smo pri izračunu kota φ *upoštevali, da kompleksno število* $-1-i\sqrt{3}$ *leži v tretjem kvadrantu. Sledi enačba v polarni obliki:*

$$|z|^4(\cos(4\phi) + i\sin(4\phi)) = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}),$$

katere rešitve dobimo iz naslednjega sistema enačb za absolutno vrednost $|z|$ *in kot* ϕ:

$$\begin{aligned}
|z|^4 = 2 \quad &\Rightarrow \quad |z| = \sqrt[4]{2}, \\
4\phi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad &\Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2},
\end{aligned}$$

kjer je k *celo število. Sledi formula za izračun rešitev:*

$$z = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2})), \; k = 0, 1, 2, 3.$$

Rešitve enačbe so zato:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 0, \\
k = 0: \; z_2 &= \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \sqrt[4]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}), \\
k = 1: \; z_3 &= \sqrt[4]{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = \sqrt[4]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}), \\
k = 2: \; z_4 &= \sqrt[4]{2}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = \sqrt[4]{2}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}), \\
k = 3: \; z_5 &= \sqrt[4]{2}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Naloga 3 (25 točk)

Dano je zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{2^{n-1} - 5^{n+2}}{5^n}.$$

a.) Določite limito zaporedja.

b.) Pojasnite, kdaj (za katera naravna števila n) zaporedje pada in kdaj narašča.

c.) Poiščite največji in najmanjši člen zaporedja, če obstajata.

d.) Določite supremum in infimum.

a.) Izračunajmo limito zaporedja:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1} - 5^{n+2}}{5^n} \begin{matrix} :5^n \\ :5^n \end{matrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{5})^{n-1} \cdot \frac{1}{5} - 5^2}{1} = -25.$$

b.) Preverimo monotonost zaporedja:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2^n - 5^{n+3}}{5^{n+1}} - \frac{2^{n-1} - 5^{n+2}}{5^n} = \frac{2^n - 5^{n+3} - 5 \cdot 2^{n-1} + 5^{n+3}}{5^{n+1}} = \\ &= \frac{2 \cdot 2^{n-1} - 5 \cdot 2^{n-1}}{5^{n+1}} = \frac{-3 \cdot 2^{n-1}}{5^{n+1}} < 0. \end{aligned}$$

Sledi, zaporedje (strogo) pada povsod, tj. za vsa naravna števila n.

c.) Ker zaporedje pada, je največji člen prvi člen zaporedja:

$$\max_n a_n = a_1 = \frac{1 - 5^3}{5} = -\frac{124}{5}.$$

Najmanjši člen zaporedja $\min_n a_n$ ne obstaja. Zaporedje se poljubno približa številu -25, vendar ga nikoli ne doseže.

d.) Ker največji člen zaporedja obstaja, je enak supremumu (najmanjši zgornji meji):

$$\sup_n a_n = \max_n a_n = -\frac{124}{5}.$$

Infimum (največja spodnja meja) je enak limiti zaporedja:

$$\inf_n a_n = -25.$$

Naloga 4 (25 točk)

Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{11 \cdot 4^n}{5^{n-3}}.$$

Vrsto najprej preoblikujmo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{11\cdot 4^n}{5^{n-3}} &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{11\cdot 4^n}{5^n\cdot 5^{-3}}=\sum_{n=2}^{\infty}11\cdot 5^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n=\sum_{n=2}^{\infty}11\cdot 5^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}880\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}=\frac{880}{1-\frac{4}{5}}=880\cdot 5=4400.\end{aligned}$$

Pri seštevanju smo uporabili formulo

$$\sum_{n=0}^{\infty}a\cdot q^n=\sum_{n=2}^{\infty}a\cdot q^{n-2}=\frac{a}{1-q},$$

ki velja, če je $|q|<1$*. V našem primeru je* $a=880$ *in* $q=\frac{4}{5}$.