REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-1}.$$

a.) Izračunajte limito $\lim_{x\to 0} f(x)$.

b.) Izračunajte limito $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

c.) Naj bo $g(x) = 2x - 1$. Določite kompozituma $(f \circ g)(x)$ in $(g \circ f)(x)$.

Gremo po vrsti.

a.) Funkcija $f(x)$ je v točki $x = 0$ definirana in zvezna, zato velja:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-1} = \left(\frac{0-1}{0+3}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = -3.$$

b.) Pri izračunu limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$ si pomagamo z znanim rezultatom

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{-x} = e.$$

Funkcijo $f(x)$, katere limito računamo, zato najprej ustrezno preoblikujemo, da lahko uporabimo zgornji rezultat:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-1} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3-4}{x+3}\right)^{x-1} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x+3}\right)^{x-1} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x+3}{4}}\right)^{x-1} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x+3}{4}}\right)^{-\frac{x+3}{4}\cdot\frac{-4}{x+3}\cdot(x-1)} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-4(x-1)}{x+3}} \\
&= e^{-4}.
\end{aligned}$$

c.) Izračunajmo še obe kompoziciji funkcij $f(x)$ in $g(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = \left(\frac{(2x-1)-1}{(2x-1)+3}\right)^{(2x-1)-1} = \left(\frac{2x-2}{2x+2}\right)^{2x-2}$$
$$= \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2(x-1)}.$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-1}\right) = 2\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-1} - 1.$$

Naloga 2 (25 točk)

Določite točke, kjer funkcija

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{x+1}$$

doseže največjo oziroma najmanjšo vrednost na intervalu $[0,3]$. Kakšni sta največja in najmanjša vrednost funkcije $f(x)$ na danem intervalu?

Funkcija $f(x)$ lahko doseže obe ekstremni vrednosti (najmanjšo in največjo vrednost) v svojih stacionarnih točkah (znotraj danega intervala), v točkah nezveznosti, v točkah neodvedljivosti ali v krajiščih intervala $[0,3]$. Poiščimo najprej stacionarne točke funkcije. Izračunajmo torej prvi odvod funkcije $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}.$$

Stacionarne točke so rešitve enačbe

$$\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2} = 0 \quad \textit{oziroma} \quad x^2+2x-2=0.$$

Ker je diskriminanta $D = 12$, dobimo dve stacionarni točki:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3},$$

torej $x_1 = -1+\sqrt{3}$ in $x_2 = -1-\sqrt{3}$. V notranjosti danega intervala $[0,3]$ leži le točka x_1, ki je kandidat za nastop iskanih ekstremnih vrednosti.

Naslednji kandidati so:

- *točke nezveznosti: / (točka $x_3 = -1$ ne leži v danem intervalu)*
- *točke neodvedljivosti: / (točka $x_3 = -1$ ne leži v danem intervalu)*
- *krajišči intervala: $x_4 = 0$ in $x_5 = 3$*

Sedaj izračunamo vrednost funkcije $f(x)$ v vseh točkah, ki so kandidati za nastop iskanih ekstremnih vrednosti, torej x_1, x_4 in x_5:

$$f(x_1) = f(-1+\sqrt{3}) = \frac{(-1+\sqrt{3})^2 - 2(-1+\sqrt{3})}{(-1+\sqrt{3})+1} = \frac{6-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} < 0,$$
$$f(x_4) = f(0) = 0,$$
$$f(x_5) = f(3) = \frac{3}{4}.$$

Sledi, funkcija $f(x)$ doseže največjo vrednost v desnem krajišču danega intervala, to je v točki $x_5 = 3$. Največja vrednost je

$$f_{max} = f(x_5) = \frac{3}{4}.$$

Funkcija $f(x)$ doseže najmanjšo vrednost v stacionarni točki $x_1 = -1+\sqrt{3}$. Najmanjša vrednost funkcije na danem intervalu je:

$$f_{min} = f(-1+\sqrt{3}) = \frac{6-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} < 0.$$

Naloga 3 (25 točk)

Izračunajte nedoločena integrala:

a.) $\displaystyle\int \ln 2x \, dx$

b.) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+x^2+3x+3} \, dx$

Prvi integral rešimo z metodo integriranja po delih (per partes), drugega pa z razcepom racionalne funkcije na parcialne ulomke.

a.) Uporabimo metodo integriranja po delih, kjer vzamemo:

$$u = \ln 2x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx,$$
$$dv = dx \Rightarrow v = x.$$

Dobimo rezultat:

$$\int \ln 2x \, dx = uv - \int v \, du = x \ln 2x - \int 1 \, dx = x \ln 2x - x + C.$$

b.) *Ker je stopnja števca enaka stopnji imenovalca (obe sta enaki* 3*), najprej polinom v števcu racionalne funkcije delimo s polinomom v imenovalcu:*

$$x^3 \ : \ (x^3+x^2+3x+3) = 1 - \frac{x^2+3x+3}{x^3+x^2+3x+3}.$$

Sedaj racionalno funkcijo

$$\frac{x^2+3x+3}{x^3+x^2+3x+3} = \frac{x^2+3x+3}{x^2(x+1)+3(x+1)} = \frac{x^2+3x+3}{(x^2+3)(x+1)}$$

razcepimo na delne (parcialne) ulomke:

$$\frac{x^2+3x+3}{(x^2+3)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2+3C}{(x^2+3)(x+1)}.$$

Sedaj izenačimo števca začetne in končne racionalne funkcije,

$$x^2+3x+3 = Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2+3C,$$

ter primerjamo koeficiente pri istih potencah spremenljivke x:

$$\begin{array}{ll} \textit{koeficient pri } x^2\textit{:} & 1 = A+C \\ \textit{koeficient pri } x\textit{:} & 3 = A+B \\ \textit{koeficient pri } x^0\textit{:} & 3 = B+3C \end{array}$$

Rešitev dobljenega sistema treh linearnih enačb za tri neznanke je:

$$A = \frac{3}{4},\ B = \frac{9}{4},\ C = \frac{1}{4}.$$

Sedaj računamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^3+x^2+3x+3}\,dx &= \int (1 - \frac{x^2+3x+3}{x^3+x^2+3x+3})\,dx = \int (1 - \frac{\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}}{x^2+3} - \frac{\frac{1}{4}}{x+1})\,dx \\ &= \int (1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{x}{x^2+3} - \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x^2+3} - \frac{\frac{1}{4}}{x+1})\,dx \\ &= x - \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{3}{8}\ln|x^2+3| + C. \end{aligned}$$

Pri tem smo v integral

$$\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$$

uvedli še novo spremenljivko $t = x^2+3$ (sledi $dt = 2x\,dx$ in $x\,dx = \frac{dt}{2}$).

Naloga 4 (25 točk)

Izračunajte ploščino lika, ki ga oklepajo parabola $y = -x^2+2x+3$, njena tangenta v točki $x = 3$ in ordinatna os.

Najprej izračunajmo tangeto. Smerni koeficient tangente je enak vrednosti odvoda funkcije v dani točki $x = 3$. Torej

$$y' = -2x + 2$$

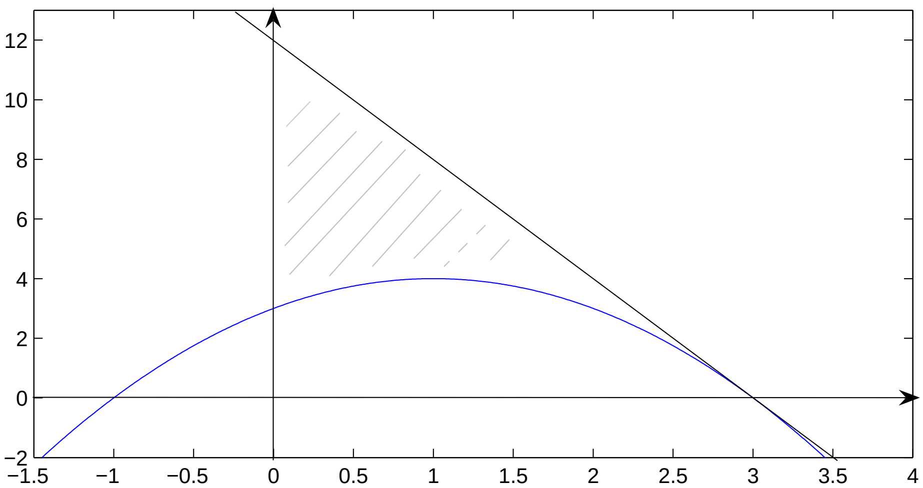
in

$$k_3 = y'(3) = -4.$$

Tangenta v točki $B(3, 0)$ ima zato enačbo

$$y - 0 = -4(x - 3) \quad \textit{oziroma} \quad y = 12 - 4x.$$

Tangenta seka ordinatno os v točki $C(0, 12)$, saj je $y(0) = 12$. Lik, ki ga omejujejo parabola, njena tangenta in ordinatna os, je zato krivočrtni trikotnik z oglišči $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ in $C(0, 12)$.



Iskana ploščina je ploščina med tangento in parabolo (tangenta leži nad parabolo) na intervalu $[0, 3]$, torej določeni integral:

$$S = \int_0^3 ((12-4x)-(-x^2+2x+3))\,dx = \int_0^3 (x^2-6x+9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3 = \frac{27}{3} - 27 + 27 = 9.$$