1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

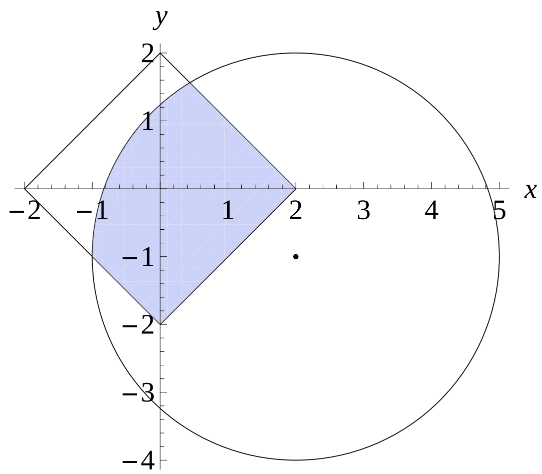
27. november 2009

1. [25*T*] Skicirajte množico točk

$$\{(x, y);\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 \leq 0, |x| + |y| \leq 2\}.$$

Rešitev:
Neenakost $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 \leq 0$ oz. $(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 9$ predstavlja poln krog s središčem v točki $S(2, -1)$ in radijem $r = 3$.
Neenakost $|x| + |y| \leq 2$ rešimo v vsakem kvadrantu posebej.

I. $x \geq 0,\ y \geq 0:\ x + y \leq 2 \Rightarrow y \leq -x + 2$
II. $x < 0,\ y \geq 0:\ -x + y \leq 2 \Rightarrow y \leq x + 2$
III. $x < 0,\ y < 0:\ -x - y \leq 2 \Rightarrow y \geq -x - 2$
IV. $x \geq 0,\ y < 0:\ x - y \leq 2 \Rightarrow y \geq x - 2$



2. [25*T*] Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} (2-4\mathrm{i})z_1 + 2(2+\mathrm{i})z_2 &= 10, \\ (-1+\mathrm{i})z_1 + (2+\mathrm{i})z_2 &= -8. \end{aligned}$$

Rešitev:
Drugo enačbo pomnožimo z -2 in enačbi seštejemo. Dobimo:

$$(4 - 6\mathrm{i})z_1 = 26$$

Torej je:

$$z_1 = \frac{26(4+6\mathrm{i})}{(4-6\mathrm{i})(4+6\mathrm{i})} = \frac{52(2+3\mathrm{i})}{16+36} = 2 + 3\mathrm{i}$$

Vstavimo v drugo enačbo in dobimo:

$$(-1+\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})+(2+\mathrm{i})z_2=-8$$

Torej je:

$$z_2=\frac{(-3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{-5+5\mathrm{i}}{5}=-1+\mathrm{i}$$

3. [25T] Izračunajte limito

$$\lim_{n\to\infty}(6n^2+1)\left[\ln(3n^2+5)-\ln(3n^2+4)\right].$$

Rešitev:
To limito izračunamo s pomočjo limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(6n^2+1)\left[\ln(3n^2+5)-\ln(3n^2+4)\right]\\
=\;&\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n^2+5}{3n^2+4}\right)^{6n^2+1}\\
=\;&\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n^2+4}\right)^{(6n^2+1)\cdot\frac{3n^2+4}{3n^2+4}}\\
=\;&\ln\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+1}{3n^2+4}}=\ln(\mathrm{e}^2)=2
\end{aligned}$$

4. [25T] Dani sta funkciji

$$f(x)=-x^2+5x-5 \quad \text{in} \quad g(x)=\sqrt{1-x}.$$

a) Določite kompozituma $(f\circ g)(x)$ in $(g\circ f)(x)$.
b) Določite definicijski območji $D(f\circ g)$ in $D(g\circ f)$.

Rešitev:

a) Kompozituma:

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(x) &= f(g(x))=-(\sqrt{1-x})^2+5\sqrt{1-x}-5\\
&= x-6+5\sqrt{1-x}\\
(g\circ f)(x) &= g(f(x))=\sqrt{1-(-x^2+5x-5)}=\sqrt{x^2-5x+6}
\end{aligned}$$

b) Definicijski območji:
V obeh primerih je funkcija definirana tam, kjer je izraz pod korenom večji ali enak 0. Iz $1-x\geq 0$ sledi $x\leq 1$, zato je

$$D(f\circ g)=(-\infty,1].$$

Iz $x^2-5x+6\geq 0$ dobimo $(x-2)(x-3)\geq 0$, zato je

$$D(g\circ f)=(-\infty,2]\cup[3,\infty).$$