REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Dana je funkcija $f(x) = e^{\sqrt{3}x} \sin x$.

a.) Izračunajte $\lim_{x\to\infty} f(x)$, če obstaja.

b.) Izračunajte $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, če obstaja.

c.) Ali je funkcija $f(x)$ omejena?

d.) Določite točke, kjer funkcija $f(x)$ doseže največjo oziroma najmanjšo vrednost na intervalu $[0, \pi]$.

Gremo po vrsti.

a.) *Funkcija* $\sin x$ *je sicer omejena, a vzdolž realne osi zavzema tako pozitivne kot negativne vrednosti (med* -1 *in* 1*). Velja še:* $\lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{3}x} = \infty$. *Sledi, da*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{3}x} \sin x$$

ne obstaja. Ko je $\sin x < 0$, *se funkcija* $f(x)$ *namreč približuje* $-\infty$, *ko je* $\sin x > 0$ *pa* ∞.

b.) *Funkcija* $\sin x$ *je povsod omejena (med* -1 *in* 1*) in velja* $\lim_{x\to-\infty} e^{\sqrt{3}x} = 0$. *Sledi:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\sqrt{3}x} \sin x = 0.$$

c.) *Funkcija* $f(x)$ *ni omejena, kar sledi iz točke a.). Torej, ne obstajata taki realni števili* m *in* M, *da bi za vsak* $x \in D_f = \mathbb{R}$ *veljalo:* $m \leq f(x) \leq M$.

d.) *Kandidati, v katerih funkcija* $f(x)$ *lahko doseže največjo ali najmanjšo vrednost na intervalu* $[0, \pi]$, *so:*

– *stacionarne točke:*

$$f'(x) = \sqrt{3}e^{\sqrt{3}x} \sin x + e^{\sqrt{3}x} \cos x = e^{\sqrt{3}x}(\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$$

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0 \quad (\textit{delimo s } \cos x)$$

$$\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

edina stacionarna točka na intervalu $[0, \pi]$ *je torej* $x_1 = \dfrac{5\pi}{6}$

- *krajišči intervala:* $x_2 = 0$ *in* $x_3 = \pi$,
- *točke nezveznosti: / (funkcija je zvezna povsod)*
- *točke neodvedljivosti: / (funkcija je odvedljiva povsod)*

Izračunajmo funkcijske vrednosti v vseh treh kandidatih:

- $f(x_1) = f(\frac{5\pi}{6}) = e^{\sqrt{3}\cdot\frac{5\pi}{6}} \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}\cdot e^{\sqrt{3}\cdot\frac{5\pi}{6}} > 0$,
- $f(x_2) = f(0) = e^0 \sin 0 = 0$,
- $f(x_3) = f(\pi) = e^{\sqrt{3}\pi}\sin\pi = 0$.

Sledi, funkcija $f(x)$ *doseže največjo vrednost* $\frac{1}{2}\cdot e^{\sqrt{3}\cdot\frac{5\pi}{6}}$ *v točki* $x_1 = \frac{5\pi}{6}$ *in najmanjšo vrednost* 0 *v točkah* $x_2 = 0$ *in* $x_3 = \pi$.

Naloga 2 (25 točk)

Za funkcijo

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} + 3(x+2)^2}{3(x+2)}$$

izračunajte:

a.) odvod $f'(0)$,

b.) racionalno funkcijo $g(x) = \sqrt{x^2+4}\cdot(f'(x)-1)$,

c.) ničle, pole, asimptoto in ekstreme funkcije $g(x)$ ter narišite graf funkcije $g(x)$.

a.) Izračunajmo najprej $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} + 6(x+2)) * 3(x+2) - (\sqrt{x^2+4} + 3(x+2)^2) * 3}{9(x+2)^2} \\
&= \frac{\frac{3x(x+2)}{\sqrt{x^2+4}} + 18(x+2)^2 - 3\sqrt{x^2+4} - 9(x+2)^2}{9(x+2)^2} \\
&= \frac{3\left(\frac{x(x+2)}{\sqrt{x^2+4}} + 3(x+2)^2 - \sqrt{x^2+4}\right)}{9(x+2)^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} \\
&= \frac{x(x+2) + 3(x+2)^2\sqrt{x^2+4} - (x^2+4)}{3(x+2)^2\sqrt{x^2+4}} \\
&= \frac{3(x+2)^2\sqrt{x^2+4} + 2x - 4}{3(x+2)^2\sqrt{x^2+4}} \\
&= 1 + \frac{2(x-2)}{3(x+2)^2\sqrt{x^2+4}}
\end{aligned}$$

Sledi $f'(0) = 1 + \frac{-4}{3\cdot4\cdot2} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

b.) Sedaj dobimo racionalno funkcijo:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sqrt{x^2+4}\cdot(f'(x)-1) \\
&= \sqrt{x^2+4}\cdot(1+\frac{2(x-2)}{3(x+2)^2\sqrt{x^2+4}}-1) \\
&= \sqrt{x^2+4}\cdot\frac{2(x-2)}{3(x+2)^2\sqrt{x^2+4}} \\
&= \frac{2(x-2)}{3(x+2)^2}
\end{aligned}
$$

c.) Dobljena racionalna funkcija $g(x)$ ima naslednje lastnosti:

- *Ničle: $x_1 = 2$ (1. stopnje).*
- *Poli: $x_2 = -2$ (2. stopnje).*
- *Asimptota: $y = 0$ (ker je stopnja števca nižja od stopnje imenovalca).*
- *Začetna vrednost: $g(0) = -\frac{1}{3}$.*
- *Ekstremi:*

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{2*3(x+2)^2-2(x-2)*6(x+2)}{9(x+2)^4} \\
&= \frac{2(x+2)\,(3(x+2)-6(x-2))}{9(x+2)^4} \\
&= \frac{2\,(18-3x)}{9(x+2)^3} \\
&= \frac{2\,(6-x)}{3(x+2)^3}
\end{aligned}
$$

Vidimo, da ima funkcija $g(x)$ eno stacionarno točko, namreč $x_3 = 6$. Naravo te točke (ali je lokalni maksimum, lokalni minimum ali prevoj) določimo s pomočjo drugega odvoda ali s pomočjo skice. Izkaže se, da je v tej točki lokalni maksimum funkcije in $g(6) = \frac{1}{24}$.

Graf funkcije $g(x)$ podaja naslednja slika.

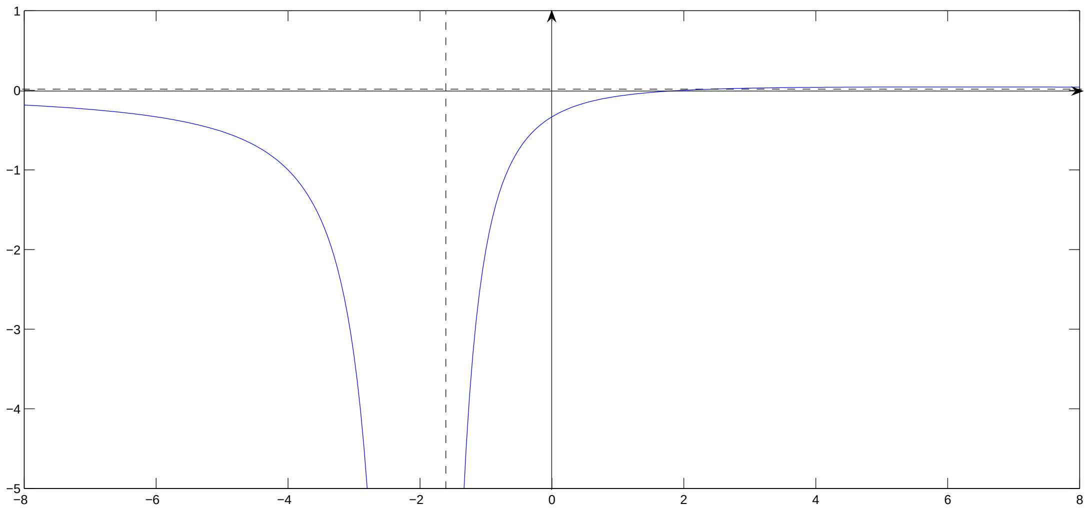
Naloga 3 (25 točk)

Izračunajte nedoločeni integral funkcije

$$(x^2-2)\sin(2x) + x^{-2} + x^{-1} + 1.$$

Izračunati moramo

$$I = \int((x^2-2)\sin(2x)+x^{-2}+x^{-1}+1)dx = \int(x^2-2)\sin(2x)dx + \int(x^{-2}+x^{-1}+1)dx.$$



Drugi integral izračunamo takoj:

$$\int (x^{-2} + x^{-1} + 1)dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \ln|x| + x + C = -\frac{1}{x} + \ln|x| + x + C.$$

Pri prvem integralu si pomagamo z metodo integriranja po delih (per partes):

$$\begin{aligned}\int (x^2-2)\sin(2x)dx &= -\frac{1}{2}(x^2-2)\cos(2x) + \int \frac{1}{2}\cdot 2x\cos(2x)dx \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) - \int \frac{1}{2}\sin(2x)dx \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + D.\end{aligned}$$

Pri tem smo na prvem koraku, ko smo prvič integral razvili po metodi per partes, vzeli $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2xdx$ *in* $dv = \sin(2x)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$. *Ko smo metodo per partes uporabili drugič, pa smo vzeli* $u = x \Rightarrow du = dx$ *in* $dv = \cos(2x)dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Sledi rezultat:

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{x} + \ln|x| + x + C - \frac{1}{2}(x^2-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + D \\ &= -\frac{1}{x} + \ln|x| + x - \frac{1}{4}(2x^2-5)\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + E.\end{aligned}$$

Naloga 4 (25 točk)

Izračunajte prostornino rotacijskega telesa, ki ga dobimo, ko graf funkcije $y = \sqrt{\tan^3 x}$, definirane na intervalu $[0, \frac{\pi}{3}]$, zavrtimo okrog abscisne osi.

Prostornino oz. volumen nastale vrtenine izračunamo takole:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} y^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan x)^3 dx.$$

Posebej izračunajmo nedoločeni integral, kjer upoštevajmo identiteto

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dobimo

$$\int (\tan x)^3 dx = \int (\tan x)^2 \cdot \tan x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \, dx.$$

Sedaj lahko v integral uvedemo novo spremenljivko: $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$, *kar nas pripelje do rezultata*

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \, dx &= \int \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) \cdot \frac{-dt}{t} = \int (-t^{-3} + \frac{1}{t}) \, dt \\ &= \frac{1}{2t^2} + \ln |t| + C = \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

Prostornina nastale vrtenine je zato enaka:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan x)^3 dx = \pi \left[\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi \left(\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} + \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ln 1 \right) \\ &= \pi (\frac{3}{2} + \ln \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} (3 + 2 \ln 2^{-1}) = \frac{\pi}{2} (3 - 2 \ln 2). \end{aligned}$$