Matematika I (UNI) 1. kolokvij (26. november 2010)

REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Določite podmnožico realnih števil, ki zadoščajo neenačbi

$$|5x - 7| \geq |2x + 3|.$$

Ločimo štiri možnosti:

$$1.)\quad \begin{array}{rcl} 5x-7 & \geq & 0 \\ 2x+3 & \geq & 0 \\ \hline 5x-7 & \geq & 2x+3 \end{array}$$

Pod pogojema $x \geq \frac{7}{5}$ *in* $x \geq -\frac{3}{2}$ *velja* $x \geq \frac{10}{3}$.
Prva delna rešitev je presek vseh treh intervalov: $x \in [\frac{10}{3}, \infty)$.

$$2.)\quad \begin{array}{rcl} 5x-7 & \geq & 0 \\ 2x+3 & < & 0 \\ \hline 5x-7 & \geq & -(2x+3) \end{array}$$

Pod pogojema $x \geq \frac{7}{5}$ *in* $x < -\frac{3}{2}$ *velja* $x \geq \frac{4}{7}$.
Druga delna rešitev je presek vseh treh intervalov, kar je prazna množica $\emptyset$.

$$3.)\quad \begin{array}{rcl} 5x-7 & < & 0 \\ 2x+3 & \geq & 0 \\ \hline -(5x-7) & \geq & 2x+3 \end{array}$$

Pod pogojema $x < \frac{7}{5}$ *in* $x \geq -\frac{3}{2}$ *velja* $x \leq \frac{4}{7}$.
Tretja delna rešitev je presek vseh treh intervalov: $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{4}{7}]$.

$$4.)\quad \begin{array}{rcl} 5x-7 & < & 0 \\ 2x+3 & < & 0 \\ \hline -(5x-7) & \geq & -(2x+3) \end{array}$$

Pod pogojema $x < \frac{7}{5}$ *in* $x < -\frac{3}{2}$ *velja* $x \leq \frac{10}{3}$.
Četrta delna rešitev je presek vseh treh intervalov: $x \in (-\infty, -\frac{3}{2})$.

Rešitev neenačbe dobimo kot unijo vseh delnih rešitev:

$$[\frac{10}{3}, \infty) \cup \emptyset \cup [-\frac{3}{2}, \frac{4}{7}] \cup (-\infty, -\frac{3}{2}) = (-\infty, \frac{4}{7}] \cup [\frac{10}{3}, \infty).$$

Naloga 2 (25 točk)

Poiščite vsa kompleksna števila $z = x + iy$, ki zadoščajo enačbi

$$z^4 = (\sqrt{3} - i)^2.$$

Kompleksno število
$$(\sqrt{3}-i)^2 = 3 - 2i\sqrt{3} - 1 = 2 - 2i\sqrt{3}$$
pretvorimo v polarno obliko $r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$. *Ker sta polarni koordinati*

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4, \\ \varphi &= \arctan\frac{-2\sqrt{3}}{2} = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \qquad \textit{(število leži v IV. kvadrantu)} \end{aligned}$$

dobimo
$$(\sqrt{3}-i)^2 = 4(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{3})).$$
Uporabimo pravilo za izračun rešitev dane enačbe, ki se glasi takole:

$$z = \sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4} + i\,\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3.$$

V našem primeru dobimo štiri rešitve:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 0\cdot\pi}{4} + i\,\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\,\sin\frac{\pi}{12}\right), \\ z_2 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 1\cdot\pi}{4} + i\,\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\,\sin\frac{5\pi}{12}\right), \\ z_3 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 2\cdot\pi}{4} + i\,\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\,\sin\frac{11\pi}{12}\right), \\ z_4 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 3\cdot\pi}{4} + i\,\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\cdot 3\cdot\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\sin\frac{17\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Naloga 3 (25 točk)

Dano je zaporedje s splošnim členom

$$a_n = (n^2+2)\ln\frac{n^2}{n^2+2}.$$

a.) Izračunajte limito zaporedja.

b.) Kakšnega predznaka so vsi členi zaporedja? Odgovor utemeljite.

c.) Ali vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira? Odgovor utemeljite.

Gremo po vrsti.

a.) Limito danega zaporedja izračunamo takole:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(n^2+2)\ln\frac{n^2}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n^2}{n^2+2}\right)^{n^2+2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{(n^2+2)-2}{n^2+2}\right)^{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+2}\right)^{n^2+2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+2}{2}}\right)^{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+2}{2}}\right)^{-\frac{n^2+2}{2}\cdot(-2)} \\
&= \ln e^{-2} = -2.
\end{aligned}$$

Pri tem smo si pomagali z znanim rezultatom:

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n} = e.$$

b.) Predznak členov zaporedja ugotovimo takole:

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{n^2+2} &< 1, \\
\ln\frac{n^2}{n^2+2} &< \ln 1 = 0, \\
a_n = (n^2+2)\ln\frac{n^2}{n^2+2} &< 0.
\end{aligned}$$

Torej, vsi členi danega zaporedja so negativno predznačeni.

c.) Ali vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2+2)\ln\frac{n^2}{n^2+2}$$

konvergira? Ker je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -2,$$

torej različna od 0*, sledi, da vrsta divergira. Vrsta namreč ne izpolnjuje potrebnega pogoja za konvergenco, ki je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Naloga 4 (25 točk)

Določite definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije

$$f(x) = \arcsin(2-x^2).$$

Vemo, da je funkcija arcsin *definirana samo na intervalu* $[-1,1]$*, njena zaloga vrednosti pa je interval* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$*. Definicijsko območje funkcije* f *je zato določeno z naslednjim pogojem:*

$$-1 \le 2-x^2 \le 1.$$

Poiščimo vsa realna števila, ki temu pogoju zadoščajo. Pogoj lahko zapišemo v obliki dveh neenačb:

$$-1 \le 2 - x^2 \quad \textit{in} \quad 2 - x^2 \le 1,$$

ki morata biti izpolnjeni hkrati. Dobimo:

$$\begin{aligned} x^2 - 3 &\le 0 & \qquad x^2 - 1 &\ge 0, \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{3} & x_{1,2} &= \pm 1, \\ x &\in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] & x &\in (\infty, -1] \cup [1, \infty). \end{aligned}$$

V rešitev (definicijsko območje funkcije f) spadajo vsa realna števila v preseku obeh množic:

$$D_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cap ((\infty, -1] \cup [1, \infty)) = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}].$$

Poglejmo še, kakšna je zaloga vrednosti Z_f funkcije f. Ko je

$$x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}],$$

zavzame kvadratna funkcija $g(x) = 2 - x^2$ vse vrednosti z intervala $[-1, 1]$. Sledi, da zavzame funkcija $f(x) = \arcsin g(x)$ vse vrednosti z intervala $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Torej,

$$Z_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Spodnja skica prikazuje grafa funkcije f (rdeča barva) in kvadratne funkcije g (modra barva).