

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

14. januar 2011

1. Izračunajte limiti

a) [15T]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x + \sin^2 x}{3x \sin x}$$

b) [15T]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right)$$

Rešitev:

a) Limito izračunamo s pomočjo dvakratne uporabe L'Hopitalovega pravila:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x + \sin^2 x}{3x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + \sin(2x)}{3 \sin x + 3x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + 2 \cos(2x)}{6 \cos x - 3x \sin x} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) Limito izračunamo s pomočjo formule za razliko kvadratov:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} = \frac{5}{2}$$

2. [20T] Zapišite enačbi tangente in normale na krivuljo

$$\ln y + \frac{x}{y} = 3$$

v točki $T(3, 1)$.

Rešitev:

Krivuljo implicitno odvajamo

$$\frac{y'}{y} + \frac{y - xy'}{y^2} = 0$$

in izrazimo

$$y' = \frac{y}{x - y}.$$

Od tu sledi, da je $k_t = y'(3, 1) = \frac{1}{2}$ in $k_n = -\frac{1}{k_t} = -2$. Od tu dobimo enačbo tangente

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

in normale

$$y = -2x + 7.$$

3. a) [15T] Izračunajte integral

$$\int_3^4 \frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

b) [10T] Določite vrednost parametra a tako, da bo

$$\int_3^4 \frac{3x + a}{x^2 - 3x + 2} dx = \ln 6.$$

Rešitev:

a) Racionalno funkcijo razbijemo na parcialne ulomke

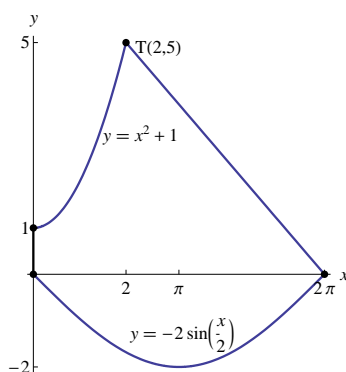
$$\frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{3x - 2}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{(A + B)x - 2A - B}{(x - 1)(x - 2)}.$$

Primerjava koeficientov da sistem enačb $A + B = 3$ in $-2A - B = -2$, ki ima rešitev $A = -1$ in $B = 4$. Izračunamo integral

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2} dx &= (-\ln|x - 1| + 4\ln|x - 2|) \Big|_3^4 \\ &= -\ln 3 + \ln 2 + 4\ln 2 - 4\ln 1 = \ln \frac{32}{3} \end{aligned}$$

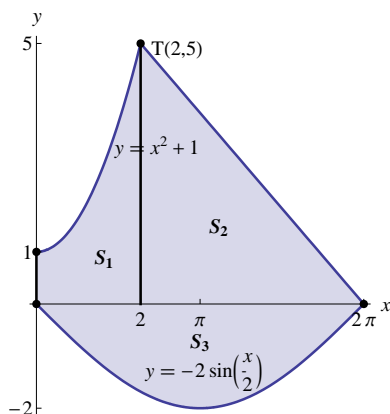
b) Iz razbitja na parcialne ulomke iz točke a) dobimo sistem enačb $A + B = 3$ in $-2A - B = a$, od koder sledi, da je $a = -A - 3$. Rešitev je enaka $\ln \frac{3^A}{2^{A-B}}$. Primerjava eksponentov pokaže, da je $A = 1$ in $B = 1$, zato je $a = -4$.

4. [25T] Izračunajte ploščino lika na sliki.



Rešitev:

Celoten lik razbijemo na tri dele kot kaže spodnja slika in izračunamo ploščino vsakega dela posebej.



$$S_1 = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{14}{3}$$

$$S_2 = \frac{5(2\pi - 2)}{2} = 5(\pi - 1)$$

$$S_3 = -\int_0^{2\pi} -2 \sin \frac{x}{2} dx = -4 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 5\pi + \frac{23}{3}$$