1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

25. november 2011

1. a) [5T] Kaj pravi princip matematične indukcije?

   b) [20T] Dokažite, da $17 \mid 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Rešitev:

a) Princip matematične indukcije: Vsaka podmnožica naravnih števil, ki vsebuje število 1 in je v njej hkrati s številom n tudi njegov naslednik $n+1$, vsebuje vsa naravna števila.

b) Pri $n = 1$ je vrednost izraza enaka $3 \cdot 5^3 + 2^4 = 391 = 17 \cdot 23$, torej deljiva s 17. Indukcijsko predpostavko zapišemo v ekvivalentni obliki:

$$3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k.$$

Dokazujemo, da je tudi izraz za $n+1$ oblike:

$$3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4} = 17k'.$$

Torej:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4} &= 25 \cdot 3 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} \\ &= 8 \cdot \underbrace{(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})}_{17k} + 17 \cdot 3 \cdot 5^{2n+1} \\ &= 17(8k + 3 \cdot 5^{2n+1}) = 17k' \end{aligned}$$

Indukcijsko predpostavko smo uporabili na drugem koraku.

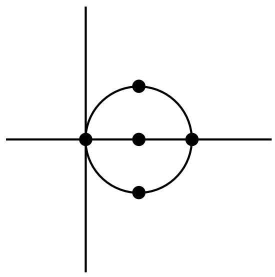
2. a) [20T] Narišite množico točk v kompleksni ravnini, ki ustreza enačbi

$$\overline{z} + z = |z|^2.$$

   b) [5T] Koliko različnih realnih rešitev ima enačba

$$(z-1)^5 = z - 1?$$

Rešitev:



a) Enačbo $\overline{z} + z = |z|^2$ preoblikujemo z uporabo $z = x + \mathrm{i}y$ v $2x = x^2 + y^2$, kar je enačba krožnice s središčem v točki $z = 1$ in radijem $r = 1$:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

b) Enačba $(z-1)^5 = z - 1$ ima 5 kompleksnih rešitev $(0,\ 1,\ 2,\ 1+\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i})$, od katerih so 3 različne realne.

3. a) [10T] Dokažite, da je zaporedje $a_n = \frac{3^n-2}{3^n+1}$ konvergentno in izračunajte limito.

b) [10T] Od katerega člena dalje se vsi členi danega zaporedja a_n razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon = 3^{-10}$?

c) [5T] Od katere vrednosti za ε dalje so vsi členi danega zaporedja znotraj ε-okolice limite?

Rešitev:

a) Ker je

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3^{n+1}-2}{3^{n+1}+1} - \frac{3^n-2}{3^n+1} = \frac{6 \cdot 3^n}{(3^{n+1}+1)(3^n+1)} > 0,$$

je dano zaporedje naraščajoče. Poleg tega je navzgor omejeno z 1, torej je konvergentno. Sledi:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n-2}{3^n+1} = 1.$$

b) Potrebno je rešiti neenačbo $|a_n - a| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{3^n-2}{3^n+1} - 1 \right| &< \frac{1}{3^{10}} \\ \frac{3}{3^n+1} &< \frac{1}{3^{10}} \\ 3^n &> 3^{11} - 1 \\ n &\geq 11 \end{aligned}$$

Od enajstega člena dalje so vsi členi danega zaporedja znotraj dane okolice.

c) Ker je dano zaporedje strogo naraščajoče, je prvi člen najbolj oddaljen od limite. Zato so za vsak $\varepsilon > a - a_1 = \frac{3}{4}$ vsi členi danega zaporedja znotraj ε-okolice.

4. a) [20T] Določite parameter a tako, da bo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{4a}{3}.$$

b) [5T] Navedite vsaj dva primera divergentnih vrst.

Rešitev:

a) Vrsta je geometrijska, zato rešujemo enačbo:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-a} &= \frac{4a}{3} \\ 3a &= 4a - 4a^2 \\ a(4a-1) &= 0 \end{aligned}$$

Sledi: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{4}$.

b) Primeri divergentnih vrst:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $p \leq 1$ ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} k$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$),
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$,
- $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, $|q| \geq 1$ ($\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$).