Matematika I (UNI) 2. kolokvij (20. januar 2012)

REŠITVE

**Naloga 1** (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^2-3x-2}-\dfrac{1}{x^2+x-6} & \text{, če } x<2,\\ 0 & \text{, če } x=2,\\ \dfrac{1}{25}\cdot\dfrac{8-4\sqrt[3]{3x+2}}{x-2} & \text{, če } x>2.\end{cases}$$

a.) Izračunajte levo in desno limito funkcije $f$ v točki $x=2$.

b.) Ali je funkcija $f$ v točki $x=2$ zvezna? Odgovor utemeljite.

*Rešitev:*

*a.) Leva limita:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 2} f(x) &= \lim_{x\uparrow 2}\left(\frac{1}{2x^2-3x-2}-\frac{1}{x^2+x-6}\right)\\ &= \lim_{x\uparrow 2}\left(\frac{1}{(2x+1)(x-2)}-\frac{1}{(x-2)(x+3)}\right)\\ &= \lim_{x\uparrow 2}\frac{(x+3)-(2x+1)}{(2x+1)(x-2)(x+3)}\\ &= \lim_{x\uparrow 2}\frac{-(x-2)}{(2x+1)(x-2)(x+3)}\\ &= \lim_{x\uparrow 2}\frac{-1}{(2x+1)(x+3)}=-\frac{1}{25}.\end{aligned}$$

*Pri izračunu desne limite uporabimo L'Hospitalovo pravilo (dobimo nedoločen limitni izraz $\frac{0}{0}$):*

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 2} f(x) &= \lim_{x\downarrow 2}\frac{1}{25}\cdot\frac{8-4\sqrt[3]{3x+2}}{x-2}\\ &= \lim_{x\downarrow 2}\frac{1}{25}\cdot\frac{-4\cdot\frac{1}{3}(3x+2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3}{1}\\ &= \lim_{x\downarrow 2}\frac{1}{25}\cdot(-4)\cdot(3x+2)^{-\frac{2}{3}}\\ &= \lim_{x\downarrow 2}\frac{-4}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}\\ &= \lim_{x\downarrow 2}\frac{-4}{25}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{25}.\end{aligned}$$

*b.) Funkcija $f$ v točki $x = 2$ ni zvezna, saj je njena funkcijska vrednost v tej točki različna od obeh limit. To je:*

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -\frac{1}{25} \neq 0 = f(2).$$

**Naloga 2** (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{x^2(1-x)}.$$

a.) Določite definicijsko območje, ničle, stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja funkcije ter $\lim_{x \to \infty} f(x)$ in $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, če sta definirani.

b.) Čim bolj natančno narišite graf funkcije $f$.

c.) Ali je funkcija $f$ v točkah $x = 0$ in $x = \frac{2}{3}$ odvedljiva? Odgovor utemeljite.

*Rešitev:*

*a.)* – *Definicijsko območje: $1 - x \geq 0$ oziroma $D_f = (-\infty, 1]$,*

– *Ničle:*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \sqrt{x^2(1-x)} &= 0 \\ x^2(1-x) &= 0 \\ x_1 = 0 \ (\textit{2. st.}), x_2 = 1 \ (\textit{1. st.}) \end{aligned}$$

– *Stacionarne točke:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2(1-x)}} &= 0 \\ \frac{x(2-3x)}{2\sqrt{x^2}\sqrt{1-x}} &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{|x|} \cdot \frac{2-3x}{\sqrt{1-x}} &= 0 \ \left(\textit{ulomek } \frac{x}{|x|} \textit{ je enak } 1 \textit{ ali } -1\right) \\ 2 - 3x &= 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

– *Intervali naraščanja:*

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ \frac{x(2-3x)}{2|x|\sqrt{1-x}} &> 0 \\ x(2-3x) &> 0 \\ x \in \left(0, \frac{2}{3}\right) & \end{aligned}$$

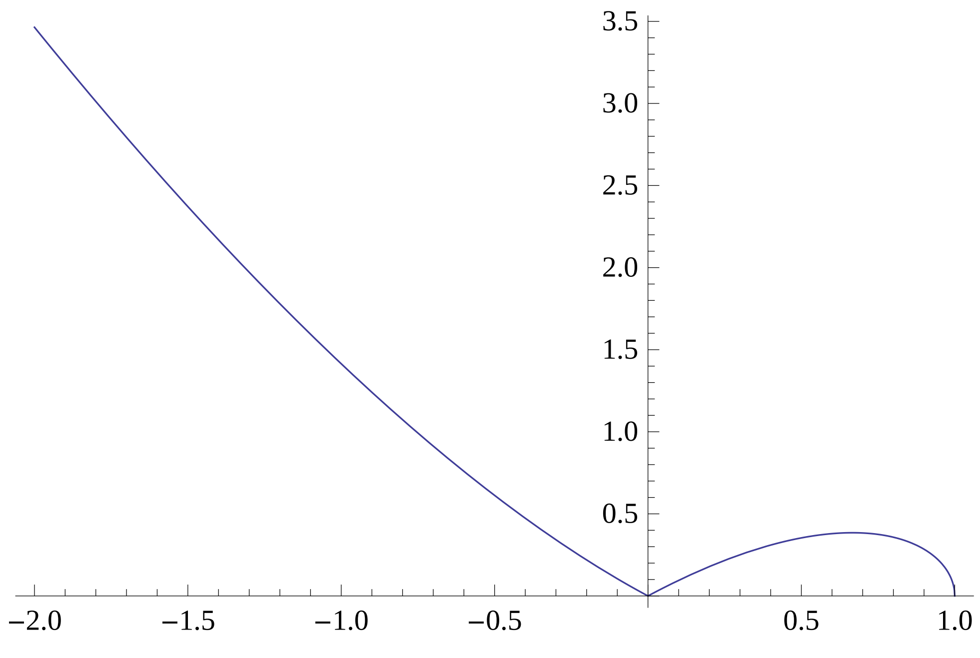
– *Intervali padanja:*

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \\ x(2-3x) &< 0 \\ x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right] & \end{aligned}$$

– *Obnašanje v neskončnosti:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \textit{ni definirana, saj je } D_f = (-\infty, 1],$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2(1-x)} = \infty.$$

*b.) Skica grafa funkcije $f$:*




*c.) Funkcija $f$ v točki $x = 0$ ni odvedljiva! V tej točki je levi odvod negativen, desni pa pozitiven. Predznak odvoda določa izraz $\frac{x}{|x|}$.*
*Funkcija $f$ je v točki $x = \frac{2}{3}$ odvedljiva. To je celo stacionarna točka funkcije; odvod je enak* 0.

**Naloga 3** (25 točk)

a.) Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1} - \tan x \cdot \sin(2x)\right) dx.$$

b.) Poimenujte vsaj tri funkcije, ki so lahko rezultat integriranja racionalne funkcije.

*Rešitev:*

a.) *Posebej integriramo funkciji, ki nastopata v razliki pod integralom:*

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}\,dx &= \int \frac{(x+3)(x+1)}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{x+3}{x+1}\,dx = \int \left(1+\frac{2}{x+1}\right) dx \\
&= x + 2\ln|x+1| + C_1 \\
\int \tan x \cdot \sin(2x)\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2\sin x \cos x\,dx = \int 2\sin^2 x\,dx \\
&= \int 2 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = x - \frac{1}{2}\sin(2x) + C_2
\end{aligned}$$

*Rezultat:*

$$\int \left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1} - \tan x \cdot \sin(2x)\right) dx = 2\ln|x+1| + \frac{1}{2}\sin(2x) + C.$$

b.) *Pri integriranju racionalne funkcije lahko dobimo polinomsko, racionalno, logaritemsko funkcijo in/ali funkcijo arkus tangens.*

**Naloga 4** (25 točk)

a.) Izračunajte obseg krivočrtnega lika, omejenega s krivuljo $y = \ln\dfrac{1}{\cos x}$, premicama $x = 0$ in $x = \frac{\pi}{4}$ ter abscisno osjo.

Namig: $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C.$

b.) Dokažite veljavnost zveze iz zgornjega namiga.

*Rešitev:*

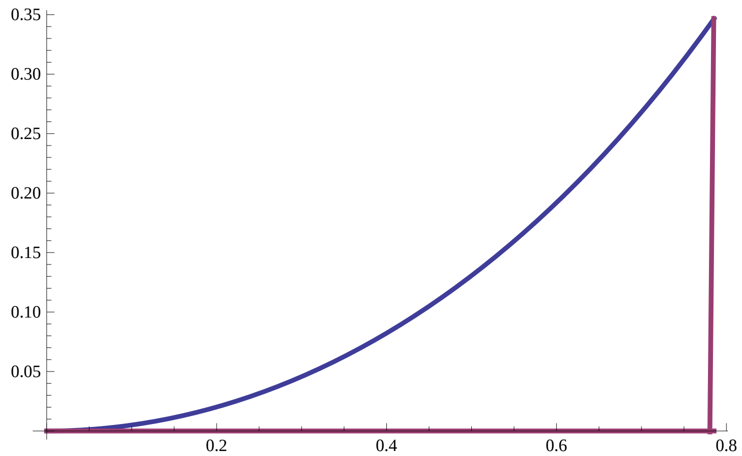
*a.) Funkcija* $y=\ln\frac{1}{\cos x}$ *je na celem intervalu* $[0,\frac{\pi}{4}]$ *nenegativna, saj je*

$$1\leq\frac{1}{\cos x}\leq\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

*V krajiščih intervala velja*

- $y(0)=0$ *in*
- $y(\frac{\pi}{4})=\ln\frac{2}{\sqrt{2}}=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2.$

*Krivočrtni lik, omejen s krivuljo* $y=\ln\dfrac{1}{\cos x}$*, premicama* $x=0$ *in* $x=\frac{\pi}{4}$ *ter abscisno osjo, ima dve ravni (ena leži na* $x$ *osi, druga na premici* $x=\frac{\pi}{4}$*) in eno krivo stranico (del krivulje* $y$*). Skica lika:*




*Obseg izračunamo takole:*

$$o=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

*Ker je* $y=\ln\frac{1}{\cos x}=-\ln\cos x$*, je*

$$y'=-\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=\tan x,$$

*in zato*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\,dx\\&=\left[\ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left|\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}+\tan\frac{\pi}{4}\right|-\ln\left|\frac{1}{\cos 0}+\tan 0\right|\\&=\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right|-\ln|1+0|=\ln\left|\sqrt{2}+1\right|.\end{aligned}$$

*Sledi rezultat*

$$
\begin{aligned}
o &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 + \ln\left|\sqrt{2}+1\right| = \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) = \frac{\pi}{4} + \ln(\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)) \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln(2+\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

*b.) Vemo, da velja*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff f(x) = F'(x).$$

*Primitivno funkcijo na desni strani namiga zato odvajajmo:*

$$
\begin{aligned}
\left(\ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right|\right)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos x} + \tan x} \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot \left(\frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}\right) \\
&= \frac{1}{\cos x}.
\end{aligned}
$$

*Zveza iz namiga velja, saj je odvod primitivne funkcije enak funkciji pod integralom, torej $F'(x) = f(x)$.*