Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

19. februar 2014

Definicija

Matrika A velikosti $m \times n$ je pravokotna shema števil, sestavljena iz m vrstic in n stolpcev:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$$

Števila a_{ij} bodo v našem primeru realna števila, torej $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
Pravimo, da je matrika (a_{ij}) realna.
Matrike običajno označimo z velikimi tiskanimi črkami.
Množico vseh realnih matrik velikosti $m \times n$ označimo z $M_{mn}(\mathbb{R})$ ali kratko M_{mn}.

Opomba

Števila v matriki so lahko tudi kompleksna, v tem primeru množico vseh kompleksnih matrik velikosti $m \times n$ označimo z $M_{mn}(\mathbb{C})$ ali na kratko tudi M_{mn}.

Matriko velikosti $m \times 1$ imenujemo stolpčna matrika ali stolpec, matriko velikosti $1 \times n$ pa vrstična matrika ali vrstica.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Matriko velikosti $n \times n$, torej je v tem primeru $m = n$, imenujemo kvadratna matrika.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Množico vseh kvadratnih matrik velikosti $n \times n$ označimo z M_n.

Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika.
Če je $a_{ij} = 0$ za vsak $i \neq j$, potem pravimo, da je A diagonalna matrika:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Če je $A \in M_n$ diagonalna matrika, ki ima po diagonali same 1 (torej $a_{ij} = 1$, če je $i = j$, in $a_{ij} = 0$, če $i \neq j$), potem jo imenujemo enotska matrika ali identiteta:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika.
Če je $a_{ij} = 0$ za vsak $i > j$, potem pravimo, da je A zgornjetrikotna matrika:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Če je $a_{ij} = 0$ za vsak $i < j$, potem pravimo, da je A spodnjetrikotna matrika:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Na množici matrik iste velikosti lahko definiramo operacijo seštevanja in množenja s skalarjem.
Naj bosta

$$A = (a_{ij}) \in M_{mn}, \quad B = (b_{ij}) \in M_{mn}$$

Potem je

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Torej je

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seštevamo istoležne elemente.

Naj bo

$$A = (a_{ij}) \in M_{mn} \quad \text{in } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Potem je

$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

Torej je

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vsak element matrike pomnožimo s skalarjem λ.

Nevtralni element za seštevanje je ničelna matrika

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Vsi elementi matrike O so enaki 0.

Primer

Izračunamo vsoto povprečno temperaturo, izmerjeno na določeni lokaciji ob določenem času.