Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

21. februar 2014

Naj bo $A \in M_{mn}$ matrika dimenzije $m \times n$. Potem lahko matriki A priredimo novo matriko, ki jo imenujemo transponirana matrika matrike A in označimo z A^T. Matriko A^T dobimo tako, da v prvotni matriki zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Velja

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika.
Če velja, da je
$$A = A^T,$$
potem pravimo, da je A simetrična matrika.
Če velja, da je
$$A = -A^T,$$
potem pravimo, da je A poševno simetrična matrika.

Primer

Teorija grafov.

Trditev

Vsaka kvadratna matrika $A \in M_n$ se da zapisati kot vsota simetrične matrike S in poševno simetrične matrike P.

Dokaz

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$ kvadratna kompleksna matrika.
Potem lahko matriki A priredimo novo matriko, ki jo imenujemo adjungirana matrika matrike A in označimo z A^*, kjer je

$$A^* = \overline{A}^T.$$

Če velja, da je

$$A = A^*,$$

potem pravimo, da je A hermitska matrika (tudi sebiadjungirana matrika).
Če velja, da je

$$A = -A^*,$$

potem pravimo, da je A poševno hermitska matrika.

Primer

Kvantna teorija.

Trditev

Za diagonalne elemente hermitske matrike velja, da so realna števila. Torej, če za $A \in M_n(\mathbb{C})$ *velja* $A = A^*$*, potem je* $a_{ii} \in \mathbb{R}$*,* $i = 1, \ldots, n$*.*
Za diagonalne elemente poševno hermitske matrike velja, da so njihovi realni deli enaki nič. Torej, če za $A \in M_n(\mathbb{C})$ *velja* $A = -A^*$*, potem je* $Re\,(a_{ii}) = 0$*,* $i = 1, \ldots, n$*.*

Dokaz

Na matrikah lahko definiramo tudi operacijo množenja.
Za matriki $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A, B \in M_{mn}$ bi lahko definirali operacijo $A \odot B = (a_{ij}) \odot (b_{ij}) = (a_{ij} b_{ij})$, to operacijo imenujemo Hadamardov produkt.
Ker nima veliko aplikacij, ga redko uporabljamo. Je pa zato zelo uporaben običajen produkt matrik, kljub temu, da je njegova definicija bolj zapletena.

Definicija

Naj bo $A \in M_{mn}$ in $B \in M_{nr}$. Potem definiramo produkt matrik A in B s predpisom

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & \ldots & b_{2r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \ldots & a_{11}b_{1r} + \cdots + a_{1n}b_{nr} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & \ldots & a_{21}b_{1r} + \cdots + a_{2n}b_{nr} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \ldots & a_{m1}b_{1r} + \cdots + a_{mn}b_{nr} \end{pmatrix}.$$

Če označimo $C = AB$, torej $(c_{ij}) = (a_{ij})(b_{ij})$, potem je

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Opomba

Element c_{ij}, ki leži v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike AB, dobimo tako, da izračunamo skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B.

Opomba

Produkt AB matrik A in B je definiran samo v primeru, ko ima matrika A toliko stolpcev, kot ima matrika B vrstic. Če je torej $A \in M_{mn}$ in $B \in M_{pr}$, potem produkt AB obstaja samo, če je $n = p$. Dobljena matrika AB je potem dimenzije $m \times r$ in zato element prostora M_{mr}.

Primer

Dane so matrike $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Izračunajmo produkte AB, BC in CB.

Za množenje matrik veljajo naslednje lastnosti

- $(AB)C = A(BC)$ (asociativnost)
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributivnost)
- $(B + C)A = BA + CA$ (distributivnost)
- V splošnem $AB \neq BA$ (ne velja komutativnost)
- Iz $AB = 0$ ne sledi nujno, da je $A = 0$ ali $B = 0$.

Primer

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Izračunajmo A^2, AB in BA.

Naj bosta $A, B \in M_n$ kvadratni matriki. Potem velja

- $(AB)^T = B^T A^T$
  Dokaz.
- $AI = IA = A$
  Dokaz.