Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

26. februar 2014

Definicija

Naj bo $A \in M_n$. Če obstaja taka matrika $A^{-1} \in M_n$, tako da velja

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

potem pravimo, da je A obrnljiva ali nesingularna matrika in da je A^{-1} inverzna matrika matrike A.

Opomba

Za dano matriko A njena inverzna matrika ne obstaja nujno. Na primer, matrika $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je singularna, torej neobrnljiva.

Kdaj je neka matrika nesingularna in kako učinkovito izračunamo njen inverz, si bomo ogledali kasneje.

Trditev

Za inverz produkta matrik $A, B \in M_n$ *velja*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Dokaz.

Definicija

Naj bo $A \in M_n$. Če velja

$$AA^* = A^*A = I,$$

potem pravimo, da je A unitarna matrika.
Unitarna realna matrika se imenuje ortogonalna matrika.

Opomba

Če je $A \in M_n$ unitarna matrika, potem je A^* inverzna matrika matrike A.

Determinanta

Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika. Označimo z $A_{ij} \in M_{n-1}$ kvadratno matriko dimenzije $(n-1) \times (n-1)$, ki jo dobimo tako, da pri matriki A izbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec.
Oglejmo si, kako definiramo determinanto matrike A.

Definicija

Determinanta, označimo jo z det, je preslikava iz prostora M_n kvadratnih matrik dimenzije $n \times n$ v realna števila, torej determinanta kvadratno matriko $A \in M_n$ dimenzije $n \times n$ preslika v realno število $\det A \in \mathbb{R}$.

Determinanto lahko definiramo rekurzivno glede na dimenzijo n prostora M_n s pomočjo razvoja, npr. po prvi vrstici:

- $n = 1$

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

- $n = 2$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- $n = 3$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13}$$

$$= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

- poljuben n

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

$$= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

Trditev

Determinanto matrike $A \in M_n$ lahko izračunamo tako, da jo razvijemo po katerikoli vrstici, torej

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Definicija

Število $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ imenujemo kofaktor elementa a_{ij}, ki leži v i-ti vrstici in j-tem stolpcu.

Opomba

Determinanto kvadratne matrike A dimenzije $n \times n$ lahko definiramo tudi na naslednji način. Izračunamo vse možne produkte n elementov matrike A, pri katerih iz vsake vrstice in iz vsakega stolpca nastopa natanko en element. Nato vse te produkte seštejemo, pri čemer pri nekaterih produktih dodamo predznak minus (ki je določen s pomočjo predznaka ustrezne permutacije).

Opomba

Determinanto lahko označimo tudi na naslednji način:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Opomba

Pri izračunu determinante velikosti 3×3 si lahko pomagamo tudi s Sarrusovim pravilom. Prepišemo 2 stolpca in izračunamo 6 produktov "diagonal".
To pravilo velja samo za izračun determinante matrike velikosti 3×3.

Opomba

Pri določanju pozitivnega in negativnega predznaka si lahko pomagamo s "šahovnico".

Primer

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Primer

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -7 & -4 & 9 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$