Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

28. februar 2014

Opomba

Računanje determinante je časovno zelo potratno.
Z izračun determinante matrike dimenzije $n \times n$ je potrebno izračunati $n!$ produktov.
Računanje determinante poskušamo poenostaviti z upoštevanjem različnih lastnosti determinante.

Lastnosti determinante

Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika dimenzije $n \times n$.

- Determinanta se ne spremeni, če zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev.
$$\det A = \det A^T$$
- Če pri kvadratni matriki zamenjamo dve vrstici, se determinanti spremeni predznak.
  Naj bo $B \in M_n$ matrika, ki jo dobimo tako, da pri matriki A zamenjamo k-to in l-to vrstico, $k \neq l$. Potem je
$$\det B = -\det A.$$
- Če ima matrika A dve enaki vrstici ali dva enaka stolpca, potem je
$$\det A = 0.$$

  Dokaz.

- Če pri matriki A vse elemente neke vrstice pomnožimo z istim faktorjem $\lambda \in \mathbb{R}$, potem ima dobljena matrika A_1 determinanto, ki je za faktor λ večja od prvotne.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- $$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

- Če za kvadratno matriko A velja, da je njena k-ta vrstica večkratnik l-te vrstice, potem je
$$\det A = 0.$$
- Če pri kvadratni matriki A katerikoli vrstici prištejemo katerokoli drugo vrstico, potem ima dobljena kvadratna matrika B isto determinanto kot A, torej
$$\det A = \det B.$$

- Naj bo A zgornje trikotna matrika. Potem je njena determinanta enaka produktu njenih diagonalnih elementov.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

- V posebnem primeru, ko je A diagonalna kvadratna matrika, je

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Opomba

Z upoštevanjem navedenih lastnosti lahko matriko preoblikujemo do zgornje trikotne matrike, ki ima enako determinanto kot prvotna matrika, determinanta zgornje trikotne matrike pa je enaka produktu diagonalnih elementov.

Primer

Izračunajmo vrednost determinante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinanta ima tudi naslednjo pomembno lastnost, ki jo imenujemo multiplikativnost.

Trditev

Naj bosta $A, B \in M_n$. Potem velja

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Posledica

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Dokaz

Ker je

$$\det I = 1,$$

je

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1},$$

torej

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Izrek

Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika. Potem je A obrnljiva matrika natanko tedaj, ko je

$$\det A \neq 0.$$

Drugače povedano, matrika $A \in M_n$ je singularna natanko tedaj, ko je

$$\det A = 0.$$

Dokaz

Dokažimo samo eno izmed implikacij v izreku.
Če je $A \in M_n$ obrnljiva matrika, potem obstaja njen inverz A^{-1} in velja

$$AA^{-1} = I,$$

torej je

$$\det(AA^{-1}) = \det I.$$

Upoštevamo, da je determinanta multiplikativna in da je $\det I = 1$, *in dobimo*

$$\det A \det A^{-1} = 1,$$

torej je $\det A \neq 0$.

Uporaba determinante

Determinanto bomo srečali pri zelo različnih temah, na primer:

- reševanje sistemov linearnih enačb
- računanje inverznih matrik
- preverjanje koplanarnosti vektorjev
- računanje prostornine
- računanje vektorskega produkta
- preverjanje linearne neodvisnosti rešitev diferencialnih enačb
- iskanju ekstremov funkcij več spremenljivk
- računanju rotorja vektorskega polja

  itd.

Oglejmo si primer uporabe determinant pri reševanju sistema n linearnih enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

z n neznankami $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s pomočjo Cramarjevega pravila.

Zapišimo najprej sistem n linearnih enačb v matrični obliki.
Definiramo matrike

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Potem je

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Matrična enačba

$$AX = B,$$

torej

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

je ekvivalentna sistemu n linearnih enačb

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$