Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

5. marec 2014

Matrična enačba

$$AX = B,$$

torej

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

je ekvivalentna sistemu n linearnih enačb

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Za $n = 1$ je

$$a_{11}x_1 = b_1.$$

Potem je rešitev sistema enaka

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$$

če je seveda $a_{11} \neq 0$.

Enačbo lahko zapišemo tudi v matrični obliki $AX = B$, torej

$$(a_{11})(x_1) = (b_1),$$

rešitev pa bi bila

$$x_1 = \frac{\det(b_1)}{\det(a_{11})}, \quad \det A \neq 0.$$

Za $n = 2$ je

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Če prvo enačbo pomnožimo z a_{22}, drugo pa z a_{12} in dobljeni enačbi odštejemo, dobimo

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

Rešitev je potem

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad \text{če je} \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Podobno dobimo, da je

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad \text{če je} \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Enačbo lahko zapišemo tudi v matrični obliki $AX = B$, torej

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Definiramo še matriki

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix},$$

pri čemer A_1 dobimo tako, da prvi stolpec matrike A nadomestimo z B, matriko A_2 pa tako, da drugi stolpec matrike A nadomestimo z B.

Pokazali smo že, da je rešitev sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

enaka

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

če je $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.
Torej je rešitev sistem

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \det A \neq 0.$$

Cramarjevo pravilo za sistem n linearnih enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

z n neznankami, ki ga lahko zapišemo v matrični obliki $AX = B$, pove, da so v primeru, ko je $\det A \neq 0$, rešitve sistema enake

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Primer

S Cramerjevim pravilom rešimo sistem

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= -4 \\ 2x - 3y &= -8 \\ y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

$x = -1,\ y = 2,\ z = \frac{1}{2}$

Računanje inverzne matrike

S pomočjo Cramarjevega pravila lahko izračunamo tudi inverzno matriko A^{-1} matrike $A \in M_n$.
Pri računanju inverzne matrike rešujemo n sistemov n linearnih enačb za n neznank.
Za dano matriko $A \in M_n$ iščemo tako matriko $X \in M_n$, da je $AX = I$, torej

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Enačbo $AX = I$ lahko razdelimo na n matričnih enačb $AX_i = I_i$, kjer z $X_i \in M_{n1}$ označimo i-ti stolpec matrike X, z I_i pa i-ti stolpec matrike I.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Vsako izmed teh n matričnih enačb (sistemov linearnih enačb za n neznank) znamo rešiti s Cramarjevim pravilom.

Trditev

Naj bo $A \in M_n$ *nesingularna kvadratna matrika, torej* $\det A \neq 0$*. Potem je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}^T ,$$

pri čemer so C_{ij} *kofaktorji elementov* a_{ij}*, torej* $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$*.*

Cramarjevo pravilo ima to pomanjkljivost, da je uporabno samo za sisteme $AX = B$, za katere je $\det A \neq 0$.
Poleg tega je računanje determinant časovno zelo zahtevno.
V nadaljevanju pokažimo, kako lahko sistem linearnih enačb veliko učinkoviteje rešimo z Gaussovo metodo.
V ta namen najprej definiramo rang matrike.

Rang matrike

Definicija

Rang matrike $A \in M_{mn}$, ki ga označimo z $\mathrm{rang}A$, je dimenzija največje neničelne poddeterminante te matrike.

Opomba

Torej je $\mathrm{rang}A = k$, če obstaja taka podmatrika A_k dimenzije $k \times k$, za katero je $\det A_k \neq 0$, za vsak $l > k$ pa je $\det A_l = 0$ za vsako podmatriko A_l dimenzije $l \times l$.
Matrika ima rang 0, če so vsi njeni elementi enaki nič.

Opomba

Rang je definiran tudi za pravokotne matrike.
Velja

$$\mathrm{rang}A \leq \min\{m, n\}.$$

Opomba

Matrika $A \in M_n$ je nesingularna natanko tedaj, ko je $\text{rang} A = n$.
Matrika $A \in M_n$ je singularna natanko tedaj, ko je $\text{rang} A < n$.

Primer

Izračunajmo rang matrike

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

in matrike

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 & 0 \\ 6 & -2 & -14 & 0 \end{pmatrix}$$

Ker smo rang matrike definirali s pomočjo determinante, lahko hitro preverimo, da za rang matrike veljajo podobne lastnosti kot za determinanto:

- rang matrike se ne spremeni, če zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev.
$$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} A^T$$
- Če pri matriki zamenjamo dve vrstici, se rang ne spremeni. Naj bo $B \in M_n$ matrika, ki jo dobimo tako, da pri matriki A zamenjamo k-to in l-to vrstico, $k \neq l$. Potem je
$$\mathrm{rang} B = \mathrm{rang} A.$$
- Če pri matriki A vse elemente neke vrstice pomnožimo z istim neničelnim faktorjem $\lambda \in \mathbb{R}$, potem ima dobljena matrika A_1 enak rang kot prvotna.

- Če pri matriki A katerikoli vrstici prištejemo katerokoli drugo vrstico, potem ima dobljena matrika B enak rang kot A, torej

$$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} B.$$

- Naj bo A "zgornje trikotna" matrika. Potem je njen rang enak številu njenih neničelnih vrstic.

Opomba

Z upoštevanjem navedenih lastnosti lahko matriko preoblikujemo do "zgornje trikotne" matrike, ki ima enak rang kot prvotna matrika, rang "zgornje trikotne" matrike pa je enak številu neničelnih vrstic.

Primer

Izračunajmo rang matrike

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 18 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & -6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

in matrike

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -7 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$