Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

7. marec 2014

Gaussova metoda za računanje sistema linearnih enačb

Iščemo rešitev sistema m linearnih enačb za n neznank

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

Kaj lahko pri sistemu enačb spreminjamo, pa se rešitev sistema ne bo spremenila?

- Zamenjamo dve enačbi.
- Enačbo pomnožimo z neničelnim skalarjem
- Od ene enačbe odštejemo večkratnik druge enačbe.

Sistem linearnih enačb lahko zapišemo tudi v matrični obliki

$$AX = B,$$

kjer so

$$A \in M_{mn}, \;\; X \in M_{n1} \;\; \text{in} \;\; B \in M_{m1}.$$

Definicija

Naj bo $A \in M_{mn}$ matrika koeficientov sistema. Če matriko A razširimo s stolpcem B, potem tako dobljeno matriko

$$R = (A|B) \in M_{m,n+1}$$

imenujemo razširjena matrika sistema.

Primer

Razširjena matrika sistema

$$
\begin{aligned}
3x - y + 2z &= -4\\
2x - 3y &= -8\\
y - 4z &= 0
\end{aligned}
$$

je

$$
\begin{pmatrix}
3 & -1 & 2 & -4\\
2 & -3 & 0 & -8\\
0 & 1 & -4 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Kako lahko transformiramo razširjeno matriko R, pa se rešitev sistema enačb ne bo spremenila?

- Zamenjamo dve vrstici.
- Vrstico pomnožimo z neničelnim skalarjem
- Od ene vrstice odštejemo večkratnik druge vrstice.

Opomba

Pri vseh naštetih transformacijah se rang matrike ne spremeni.

Pri Gaussovi metodi s pomočjo naštetih treh transformacij preoblikujemo razširjeno matriko do "zgornje trikotne" matrike in nato rekurzivno izračunamo rešitev sistema.
Za sistem n enačb z n neznankami bi preoblikovali razširjeno matriko do matrike

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1n} & c_1 \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2,n-1} & r_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{nn} & c_n \end{pmatrix}$$

in od tod

$$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}, \quad r_{nn} \neq 0,$$

$$x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - r_{n-1,n}x_n}{r_{n-1,n-1}}, \quad r_{n-1,n-1} \neq 0, \ \text{etc.}$$

Kaj je z obstojem rešitve sistema linearnih enačb?

Primer

Naj bosta premici podani z enačbama

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ in } a_2x + b_2y = c_2.$$

Katere so tiste točke, ki ležijo hkrati na obeh premicah?
Iščemo torej rešitve sistema dveh linearnih enačb za neznanki x in y:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Kaj je lahko rešitev tega sistema?

- Premici se ne sekata, sistem nima nobene rešitve.
- Premici se sekata v eni točki, sistem ima natanko eno rešitev.
- Premici ležita ena na drugi, sistem ima neskončno rešitev.

V splošnem na vprašanje o obstoju rešitev sistema m linearnih enačb za n neznank odgovarja naslednji izrek.

Izrek

Naj bo

$$AX = B$$

sistem m linearnih enačb za n neznank, pri čemer so

$$A \in M_{mn}, \;\; X \in M_{n1} \quad \textit{in} \quad B \in M_{m1}.$$

Naj bo

$$R = (A|B)$$

razširjena matrika sistema.

Potem ima sistem rešitev natanko tedaj, ko je

$$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} R.$$

Če ima sistem rešitev, potem je rešitev ena sama natanko tedaj, ko je

$$\mathrm{rang} A = n.$$

Če je

$$\mathrm{rang} A < n,$$

potem ima sistem neskončno rešitev. Označimo $r = \mathrm{rang} A$. Potem si za $n - r$ neznank lahko izberemo poljubne vrednosti, vrednosti preostalih r neznank pa so s temi natanko določene.

Primer

Primer

Oglejmo si nekaj lastnosti sistema, ki ima na desni strani same ničle.

Definicija

Sistem m linearnih enačb za n neznank $AX = B$, kjer je $A \in M_{mn}$, $X \in M_{n1}$, $B \in M_{m1}$, je homogen, če je $B = 0$.

Izrek

Homogen sistem

$$AX = 0, \ \textit{kjer je } A \in M_{mn}, \ \ X \in M_{n1} \quad \textit{in} \quad B \in M_{m1},$$

ima vedno rešitev. Trivialna rešitev $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ *je vedno rešitev homogenega sistema.*
Homogen sistem ima netrivialno rešitev, če je

$$\mathrm{rang} A < n.$$

Če je $A \in M_n$*, potem ima sistem netrivalno rešitev, če je* $\mathrm{rang} A < n$*, če je torej*

$$\det A = 0,$$

če je torej A *singularna matrika.*
Če je $m < n$*, potem je* $\mathrm{rang} A < n$ *in sistem ima netrivialno rešitev.*

Primer

S pomočjo Gaussove metode lahko rešujemo tudi matrične enačbe

$$AX = C,$$

kjer sta $A, C \in M_n$ dani matriki, $X \in M_n$ pa je neznana matrika, ki jo iščemo.
Matrično enačbo rešimo tako, da hkrati rešujemo n sistemov n linearnih enačb za n neznank.
To storimo tako, da matriko A razširimo do matrike $(A|C)$, nato pa z elementarnimi operacijami preoblikujemo razširjeno matriko do matrike, ki ima na levi polovici identično matriko, desna polovica pa je potem ravno iskana matrika X, torej

$$(A|C) \sim (I|X).$$

Primer