Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

12. marec 2014

V nadaljevanju si bomo ogledali, kako lahko na matrike dimenzije $m \times n$ gledamo kot na preslikave iz vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$ v vektorski prostor $\mathbb{R}^m$.
Najprej definirajmo, kaj je to vektorski prostor.

Definicija

Realni vektorski prostor je neprazna množica $\mathcal{V}$ skupaj z dvema operacijama, to sta seštevanje elementov iz $\mathcal{V}$, ki jih imenujemo vektorji, in množenje elementov iz $\mathcal{V}$ z realnimi števili, ki jih imenujemo skalarji.

Za poljubna elementa $a, b \in \mathcal{V}$ je njuna vsota $a + b \in \mathcal{V}$ in velja:

- $a + b = b + a, \quad a, b \in \mathcal{V}$ (komutativnost)
- $(a + b) + c = a + (b + c), \quad a, b, c \in \mathcal{V}$ (asociativnost)
- Obstaja tak element $0 \in V$, da je $a + 0 = a$ za vsak $a \in \mathcal{V}$ (nevtralni element za seštevanje)
- Za vsak $a \in \mathcal{V}$ obstaja tak element $-a \in \mathcal{V}$, da je $a + (-a) = 0$ (inverzni element za seštevanje)

Za poljuben element $a \in \mathcal{V}$ in skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda a \in \mathcal{V}$ in velja:

- $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \quad a, b \in \mathcal{V}, \lambda \in \mathbb{R}$ (distributivnost)
- $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \quad a \in \mathcal{V},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (distributivnost)
- $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a), \quad a \in \mathcal{V},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (asociativnost)
- $1 \cdot a = a, \quad a \in \mathcal{V}, 1 \in \mathbb{R}$ (1 je nevtralni element pri množenju s skalarjem)

Opomba

Če bi za skalarje namesto realnih števil vzeli kompleksna števila, bi dobili kompleksen vektorski prostor.

Primer

- $\mathcal{V} = M_{mn}$, torej je $\mathcal{V}$ prostor vseh $n \times m$ matrik
- $\mathcal{V}$ je prostor diagonalnih matrik
- $\mathcal{V}$ je prostor zgornje trikotnih matrik
- $\mathcal{V}$ je prostor vektorjev v ravnini ali v prostoru
- $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ je prostor n-dimezionalnih vektorjev, ki jih lahko predstavimo kot stolpčne matrike dimenzije $n \times 1$.
- $\mathcal{V}$ je prostor realnih zaporedij
- $\mathcal{V}$ je prostor realnih funkcij za seštevanje po točkah.
- $\mathcal{V}$ je prostor vseh polinomov.

Definicija

Izraz

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

kjer so $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{V}$ in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, imenujemo linearna kombinacija vektorjev $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Definicija

Če je linearna kombinacija vektorjev $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{V}$ enaka nič samo takrat, ko so vsi skalarji enaki nič, potem pravimo, da so vektorji $a_1, \ldots, a_n$ linearno neodvisni.
Torej so $a_1, \ldots, a_n$ linearno neodvisni, kadar iz enakosti

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$$

sledi, da velja $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Definicija

Vektorji $a_1, \ldots, a_n$ so linearno odvisni, kadar niso linearno neodvisni.

Primer

Vektorji i, j in k v prostoru $\mathbb{R}^3$.
Vektorji $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$ v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Primer

Polinomi 1, x, x^2, x^3 v prostoru vseh polinomov.

Definicija

Če obstaja taka podmnožica $B \subset \mathcal{V}$, katere elementi so linearno neodvisni, vsak element iz $\mathcal{V}$ pa se da zapisati kot linearna kombinacija elementov iz B, potem množico B imenujemo baza prostora $\mathcal{V}$.
Če je baza prostora $\mathcal{V}$ končna množica, potem moč baze imenujemo dimenzija vektorskega prostora $\mathcal{V}$.

Primer

Oglejmo si nekaj baz prej navedenih prostorov.

- $\mathcal{V} = M_{mn}$
- $\mathcal{V}$ je prostor diagonalnih matrik
- $\mathcal{V}$ je prostor zgornje trikotnih matrik
- $\mathcal{V}$ je prostor vektorjev v ravnini ali v prostoru
- $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ je prostor n-dimezionalnih vektorjev, ki jih lahko predstavimo kot stolpčne matrike dimenzije $n \times 1$.
- $\mathcal{V}$ je prostor realnih zaporedij
- $\mathcal{V}$ je prostor realnih funkcij za seštevanje po točkah.
- $\mathcal{V}$ je prostor vseh polinomov.