Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

14. marec 2014

Na vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ lahko definiramo linearno preslikavo na naslednji način.

Definicija

Naj bosta $\mathcal{V}_1$ in $\mathcal{V}_2$ vektorska prostora in naj bo f preslikava, ki slika iz $\mathcal{V}_1$ v $\mathcal{V}_2$.
Pravimo, da je preslikava $f : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$:

- aditivna, če za vsaka $a, b \in \mathcal{V}$ velja

$$f(a + b) = f(a) + f(b),$$

- homogena, če za vsak $a \in \mathcal{V}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ velja

$$f(\lambda a) = \lambda f(a),$$

- linearna, če je hkrati aditivna in homogena.

Opomba

Linearna preslikava, ki slika iz enega vektorskega prostora v drug vektorski prostor, je preslikava, ki ohranja obe operaciji, ki sta definirani na vektorskem prostoru, to sta seštevanje in množenje s skalarjem:

$$f(a+b)=f(a)+f(b), \quad f(\lambda a)=\lambda f(a).$$

Torej linearna preslikava ohranja matematično strukturo vektorskega prostora.

Matrike kot linearne preslikave

Definicija

Naj bo $A \in M_{mn}$. Potem za vsak $X \in M_{n1} = \mathbb{R}^n$ velja, da je

$$AX \in M_{m1} = \mathbb{R}^m,$$

torej lahko definiramo preslikavo $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ki je definirana kot matrično množenje matrik.

Trditev
Matrika A je linearna preslikava.

Dokaz

Izrek

Vsaka linearna preslikava iz $\mathbb{R}^n$ *v* $\mathbb{R}^m$ *se da predstaviti v obliki matrike.*

Primer
Projekcija vektorja v ravnini na abscisno os.

Primer

Rotacija vektorja v ravnini za kot α.

Lastne vrednosti in lastni vektorji

O matriki, kot preslikavi, dobimo veliko informacij, če poznamo njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

Definicija

Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n \quad \text{in } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n1}.$$

Če za neničelen X, torej $X \neq 0$, velja

$$AX = \lambda X, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

potem število λ imenujemo lastna vrednost matrike A, vektor X pa lastni vektor matrike A, ki pripada lastni vrednosti λ.

Opomba

Lastne vrednosti in lastne vektorje smo definirali samo za kvadratne matrike.

Opomba

Če je X lastni vektor matrike A, ki pripada lastni vrednosti λ, potem je μX prav tako lastni vektor matrike A, ki pripada lastni vrednosti λ, za vsak $\mu \in \mathbb{R}$.
Res.

Opomba

Lastni vektor matrike A je tak element vektorskega prostora, ki ga matrika A preslika samega vase, pomnoženega še s skalarnim faktorjem.
Matrika lastnemu vektorju ne spremeni smeri.

Oglejmo si, kako izračunamo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike za dano matriko $A \in M_n$.
Poiskati moramo tak neničelen $X \in M_{n1}$ in $\lambda \in \mathbb{C}$, da bo veljalo

$$AX = \lambda X,$$

oziroma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Enačbo $AX = \lambda X$ preoblikujemo do enačbe
$$AX - \lambda X = 0,$$
oziroma
$$(A - \lambda I)X = 0.$$
- Dobimo linearen sistem n enačb za n neznank $x_1, \ldots, x_n$.
- Sistem je homogen, zato ima vedno trivialno rešitev.
- Lastni vektor mora biti neničelen, zato nas trivialna rešitev ne zanima. Iščemo torej netrivalno rešitev.
- Netrivialna rešitev homogenega sistema obstaja takrat, ko je matrika koeficientov singularna, torej ko je $A - \lambda I$ singularna matrika.

- Matrika je singularna, ko je njena determinanta enaka nič, torej iščemo rešitev enačbe

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

- Na levi strani enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$ je polinom n-tega reda v spremenljivki λ, torej iščemo ničle polinoma n-tega reda.
- Polinom n-tega reda ima n ničel, torej ima matrika dimenzije $n \times n$ največ n različnih lastnih vrednosti.
- Poiščemo rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$, ki so natanko lastne vrednosti, in nato za vsako izmed rešitev poiščemo pripadajoči lastni vektor.

Primer

Določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$