Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

2. april 2014

Funkcijske vrste

Spomnimo se, kaj je to številska vrsta.
Dano imamo neko zaporedje realnih števil

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Kaj bi bila vsota neskončno členov tega zaporedja?
Na primer, kaj je

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$$

Definicija

Naj bo $\{a_n\}$ zaporedje realnih števil. Izraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

imenujemo številska vrsta, ali na kratko vrsta, število a_n pa imenujemo splošni člen vrste.

S pomočjo členov zaporedja $\{a_n\}$ definiramo novo zaporedje $\{s_n\}$ s členi

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1, \\
s_2 &= a_1 + a_2, \\
&\dots \\
s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

ki jih imenujemo delne vsote.

Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

je konvergentna, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot $\{s_n\}$.
Limito zaporedja delnih vsot imenujemo vsota vrste.
Če vrsta ni konvergentna, potem pravimo, da je divergentna.

Dano imamo zaporedje realnih funkcij

$$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

Kaj bi bila neskončna vsota teh funkcij?
Na primer, kaj je

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \ldots$$

Definicija

Naj bo $\{f_1, f_2, \ldots\}$ števna množica realnih funkcij. Potem izraz

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

imenujemo funkcijska vrsta.

Za vsak $x_0 \in \mathbb{R}$, ki je v definicijskem območju vseh funkcij f_n, $n \in \mathbb{N}$, je potem

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

številska vrsta.
Če za nek x_0 številska vrsta konvergira, potem pravimo, da je funkcijska vrsta konvergentna za ta x_0, oziroma, da je x_0 v definicijskem območju funkcijske vrste.
Če za nek x_0 številska vrsta divergira, potem pravimo, da je za ta x_0 funkcijska vrsta divergentna, x_0 ni v definicijskem območju funkcijske vrste.
Množica vseh vrednosti x, za katere je funkcijska vrsta konvergentna, sestavlja definicijsko območje funkcijske vrste.

Primer

Dane so funkcije $f_n(x) = (\sin x)^n$. Zanima nas konvergenca funkcijske vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n = \sin x + (\sin x)^2 + (\sin x)^3 + \dots$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $y = \sin x$, potem vidimo, da za vsako vrednost spremenljivke x dobimo geometrijsko vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = y + y^2 + y^3 + \dots,$$

ki konvergira, če je $|y| < 1$.

Torej mora biti

$$|\sin x| < 1,$$

oziroma $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n = \sin x + (\sin x)^2 + (\sin x)^3 + \ldots$$

konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$, razen za $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Oglejmo si, kaj je z integriranjem in odvajanjem funkcijskih vrst. V ta namen najprej definirajmo pojem enakomerne konvergence funkcijske vrste.

Definicija

Funkcijska vrsta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

je na intervalu $[a, b]$ enakomerno konvergentna, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots| < \varepsilon$$

za vsak $n > n_0$ in vsak $x \in [a, b]$.

Opomba

Če je $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ enakomerno konvergentna vrsta na $[a, b]$, potem za vsak $t \in [a, b]$ številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ "enako hitro" konvergira.
Ostanek vrste je majhen od istega n_0 dalje za vse $t \in [a, b]$.

Primer

Raziščimo, kaj je z enakomerno konvergenco funkcijskih vrst:

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

  Funkcijska vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ni zvezna v točki $x = 0$, saj je njena vrednost v 0 enaka 0, za vse ostale vrednosti x pa $1 + x^2$. Funkcija na intervalu $[-1, 1]$ ni enakomerno konvergentna.

- $$\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1} - x^n)$$

  Funkcijska vrsta konvergira na $(-1, 1]$, a na tem intervalu ni EK. Za vsak $1 > \varepsilon > 0$ in za vsak $m \in \mathbb{N}$ lahko najdemo tak x_0 dovolj blizu 1, da ostanek vrste ne bo manjši od ε za vse x z intervala $(-1, 1]$ Ni zvezna v točki $x = 1$.

Izrek

Naj bo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *funkcijska vrsta. Velja:*

- *Če so vse funkcije* f_n *zvezne in je funkcijska vrsta enakomerno konvergentna, potem je* f *zvezna funkcija.*
- *Če je funkcijska vrsta enakomerno konvergentna, potem jo lahko členoma integriramo, torej je*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

- *Če so funkcije* f_n *odvedljive in je vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *enakomerno konvergentna, potem je*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Potenčna vrsta

Definicija

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

pri čemer je $x_0 \in \mathbb{R}$.

Kaj je s konvergenco potenčne vrste?
S pomočjo kvocientnega kriterija lahko določimo konvergenčno območje potenčnih vrst.

Definicija

Če za potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ obstaja $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, potem število

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

imenujemo konvergenčni polmer potenčne vrste.

Izrek

Naj bo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

potenčna vrsta in R njen konvergenčni polmer. Potem potenčna vrsta

- *za vsak $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ konvergira,*
- *za vsak $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$ divergira,*
- *za $x = x_0 - R$ in $x = x_0 + R$ pa, odvisno od potenčne vrste, lahko konvergira ali divergira.*