Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

4. april 2014

Primer

Določimo konvergenčno območje za potenčne vrste

- $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

Potenčne vrste imajo tudi naslednjo lepo lastnost.

Izrek

Potenčna vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

s konvergenčnim polmerom R je enakomerno konvergentna na vsaki zaprti omejeni podmnožici intervala $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Za potenčne vrste potem velja naslednji izrek.

Izrek

Naj bo konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *enak* R *in naj bo*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Potem za vsak $x \in (-R, R)$ *velja*

- *funkcija* f *je zvezna,*
- $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$
- $$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Taylorjeva vrsta

Naj bo dana realna funkcija f, ki je v okolici točke 0 neskončnokrat odvedljiva. Funkcijo f bi radi v okolici točke 0 aproksimirali s polinomom stopnje n.
Naj bo

$$p_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \ldots + a_{n,n}x^n$$

tak polinom n-te stopnje, za katerega velja, da se vsi njegovi odvodi v točki 0 ujemajo z odvodi funkcije f v točki nič, torej

$$p_n^{(i)}(0) = f^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Izračunamo:
$p_n^{(0)}(x) = p_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + a_{n,3}x^3 + \ldots + a_{n,n}x^n,$
$p_n^{(1)}(x) = p_n'(x) = a_{n,1} + 2a_{n,2}x + 3a_{n,3}x^2 + \ldots + na_{n,n}x^{n-1},$
$p_n^{(2)}(x) = p_n''(x) = 2a_{n,2} + 3 \cdot 2a_{n,3}x + \ldots + n(n-1)a_{n,n}x^{n-2}, \ldots,$
$p_n^{(n)}(x) = n!a_{n,n}.$
Torej je
$p_n(0) = a_{n,0} = f(0)$, $p_n'(0) = a_{n,1} = f'(0)$, $p_n''(0) = 2a_{n,2} = f''(0)$, $\ldots$, $p_n^{(n)}(0) = n!a_{n,n} = f^{(n)}(0)$
in zato

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i.$$

Polinom

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

imenujemo Taylorjev polinom stopnje n, vrsto

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

pa Taylorjeva vrsta.
Vprašamo se, ali zaporedje polinomov p_n konvergira proti funkciji f, oziroma, ali velja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Izkaže se, da je lahko zaporedje Taylorjevih polinomov funkcije f konvergentno, vendar funkcija f ni enaka Taylorjevi vrsti za vse vrednosti x, za katere je funkcijska vrsta konvergentna.

Primer

Taylorjeva vrsta funkcije

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

torej funkcijska vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

je konvergentna, konvergira proti ničelni funkciji ($\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$ za vsak n), kar pomeni, da je enaka funkciji f samo za $x = 0$.

Označimo z R_n razliko med funkcijo f in njenim Taylorjevim polinomo p_n stopnje n, torej

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Funkcijo R_n imenujemo ostanek vrste.
Da bo neskončnokrat odvedljiva funkcija f enaka razvoju v Taylorjevo vrsto, mora biti

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Hitro lahko izpeljemo, da je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kjer je $0 \leq \xi \leq x$.

Opomba

Večkrat se izkaže, da je ostanek vrste manjši od prvega neupoštevanega člena vrste.

Dobljene rezultate za razvoj funkcije v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 lahko hitro posplošimo na rezultate o razvoju v Taylorjevo vrsto okrog katere druge točke:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

kjer je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad x_0 < \xi < x.$$