Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

9. april 2014

1. Eksponentna funkcija $f(x) = e^x$.
Funkcijo f razvijemo v Taylorjevo vrsto tako, da izračunamo ustrezne odvode.

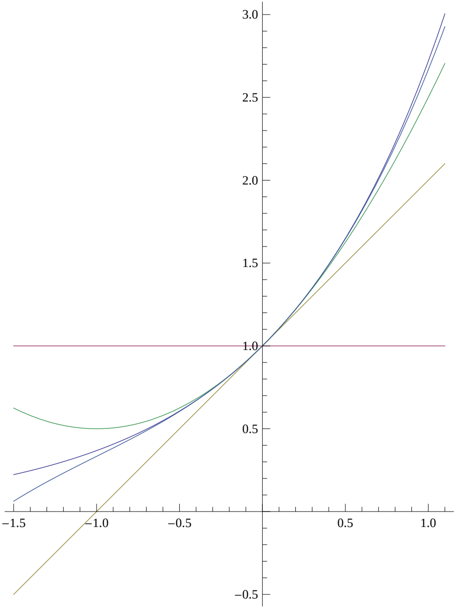
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Konvergenčni polmer $R = \infty$, torej vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Opomba

Za vrednost $x = 1$ dobimo

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
−0.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0

2. Sinusna funkcija $f(x) = \sin x$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Konvergenčni polmer $R = \infty$, torej vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Opomba

Sinus je liha funkcija, pri razvoju v Taylorjevo vrsto nastopajo samo lihe potence.

Opomba

Za majhne vrednosti x je

$$\sin x \approx x.$$

$$\sin 0.01 = 0.00999983.$$

3. Kosinusna funkcija $f(x) = \cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Konvergenčni polmer $R = \infty$, torej vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Opomba

Kosinus je soda funkcija, pri razvoju v Taylorjevo vrsto nastopajo samo sode potence.

Opomba

Za majhne vrednosti x je

$$\cos x \approx 1 - \tfrac{x^2}{2}.$$

$$\cos 0.01 = 0.99995000041$$

Opomba

Če v razvoju eksponentne funkcije $f(x) = e^x$ v Taylorjevo vrsto namesto x vstavimo ix, dobimo

$$e^{ix} = 1 + i \cdot x - \frac{x^2}{2!} - i \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \cdot \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Torej je

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right),$$

oziroma

$$e^{i \cdot x} = \cos x + i \cdot \sin x = \exp(i \cdot x).$$

4. Logaritemska funkcija $f(x) = \log(1 + x)$
Ker funkcija $\log x$ v okolici $x = 0$ ni definirana, v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 razvijemo funkcij $f(x) = \log(1 + x)$.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Konvergenčni polmer $R = 1$, preverimo še krajišča intervala in dobimo, da vrsta konvergira za vsak $x \in (-1, 1]$.
S pomočjo razvoja funkcije $f(x) = \log(1 + x)$ v Tayorjevo vrsto lahko izračunamo vrednosti logaritma za vsa realna števila na intervalu $(0, 2]$.

Primer

$$\log 1.01 = 0.00995033$$

$$\log 2 = 0.69314718$$

5. Binomska vrsta, funkcija $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Preden bomo lahko zapisali razvoj v Taylorjevo vrsto funkcije $f(x) = (1+x)^m$, $m \in \mathbb{R}$, moramo najprej definirati binomski simbol $\binom{\alpha}{n}$, pri čemer je α poljubno realno število.

Spomnimo se:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Pascalov trikotnik

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}, \quad m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Posplošimo

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$