Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

16. april 2014

Razvijmo sedaj funkcijo $f(x) = (1+x)^\alpha$ v Taylorjevo vrsto okrog točke 0.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Konvergenčni polmer $R = 1$.

Primer

Razvijmo v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 funkcijo $\sqrt{1+x}$.

Primer

Izračunajmo $\sqrt{5}$.

Zapišemo

$$5 = 4 + 1 = 4\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 2^2\left(1 + \frac{1}{4}\right).$$

Sledi

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2\left(1 + \frac{1}{4}\right)} = 2\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{4} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \binom{\frac{1}{2}}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots\right)$$

Videli smo že, da lahko s pomočjo Taylorjeve vrste izračunamo vrednost funkcije v neki točki. Oglejmo si še en primer.

Primer

Funkcija integralski sinus je definirana z enakostjo

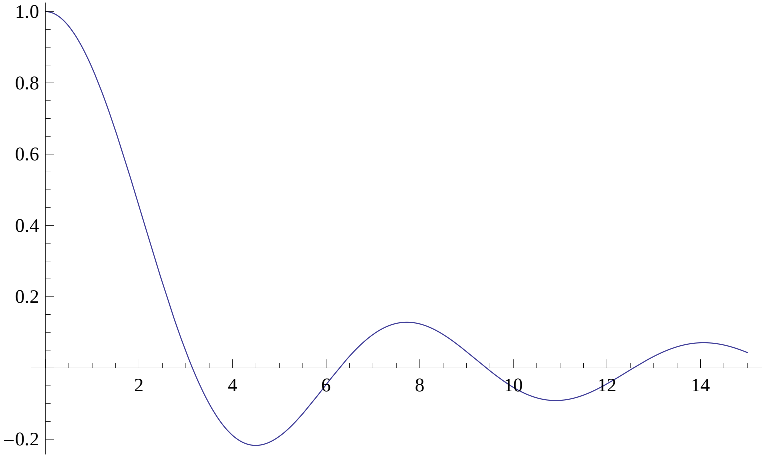
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Nedoločeni integral

$$\int \frac{\sin t}{t}\, dt$$

ni elementarna funkcija.
Vemo že, da je

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
2
4
6
8
10
12
14

Funkcijo integralski sinus razvijmo v Taylorjevo vrsto:

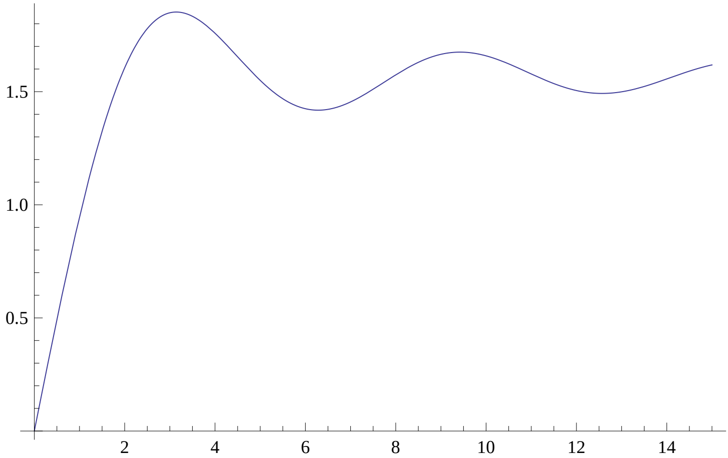
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

Potem je

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots\right) dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$


1.5
1.0
0.5
2
4
6
8
10
12
14

Fourierjeva vrsta

Videli smo, da je velikokrat uporabno, če funkcijo razvijemo v funkcijsko vrsto, torej jo zapišemo kot neskončno vsoto "lepih funkcij".
Funkcije, ki smo jih razvili v Taylorjevo vrsto, torej zapisali kot neskončno vsoto polinomov, so bile neskončnokrat odvedljive.
Kaj če funkcija ni neskončnokrat odvedljiva? Kaj če sploh ni zvezna?
V splošnem ne moremo pričakovati, da bomo katerokoli funkcijo lahko zapisali kot vsoto lepih funkcij.

Primer

Izmenična napetost.

V praksi velikokrat obravnavamo periodične funkcije. V nadaljevanju si bomo ogledali, kako lahko periodične funkcije zapišemo kot neskončno vsoto "lepih funkcij", ki morajo biti seveda tudi periodične.
Lepe periodične funkcije so sinusi in kosinusi.
Pri razvoju periodične funkcije v Fourierjevo vrsto zapišemo periodično funkcijo kot neskončno vsoto sinusov in kosinusov.

Oglejmo si najprej nekaj osnovnih pojmov.

Definicija

Realna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodična, če obstaja tako realno število $p \in \mathbb{R}$, da je

$$f(x + p) = f(x)$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$.
Število p imenujemo perioda funkcije f.

Trditev

Periodična funkcija f s periodo p je natanko določena z vrednostmi na kateremkoli intervalu dolžine p.
Torej zadošča poznati vrednosti funkcije f samo na kateremkoli intervalu dolžine p.

Trditev

Če je p perioda funkcije f, potem je za vsak $n \in \mathbb{N}$ število np tudi perioda funkcije f.

Trditev

Naj bosta f in g periodični funkciji z isto periodo $p \in \mathbb{R}$ in naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ konstanti. Potem je funkcija $af + bg$ tudi periodična funkcija s periodo p, torej

$$(af + bg)(x + p) = af(x + p) + bg(x + p) = af(x) + bg(x)$$

$$= (af + bg)(x).$$

Primer

Nekaj periodičnih funkcij:

$$\sin x, \cos x, \quad p = 2\pi$$
$$\sin(2x), \cos(2x), \quad p = \pi, \text{ perioda je tudi } 2\pi$$
$$\sin(3x), \cos(3x), \quad p = \frac{2\pi}{3}, \text{ perioda je tudi } 2\pi$$
$$\sin(nx), \cos(nx), \quad p = \frac{2\pi}{n}, \text{ perioda je tudi } 2\pi$$

Videli smo, da so vse funkcije oblike $\sin(nx), \cos(nx)$ periodične funkcije s periodo 2π.
Potem pa je tudi katerakoli linearna kombinacija (končna vsota) takih funkcij periodična funkcija s periodo 2π.
Neskončno vsota takih funkcij

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

imenujemo trigonometrijska vrsta.

Periodično funkcijo f s periodo 2π bi radi razvili v Fourierjevo vrsto, torej bi jo radi zapisali kot trigonometrijsko vrsto

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

V ta namen moramo:

- določiti koeficiente a_n in b_n,
- ugotoviti, kdaj trigonometrijska vrsta konvergira,
- ugotoviti, za katere vrednosti spremenljivke x je vrednost funkcije $f(x)$ enaka vsoti trigonometrijske vrste.