Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

18. april 2014

Določimo najprej koeficiente.
Pri Taylorjevi vrsti smo koeficiente določili tako, da smo zahtevali, da se ujemajo vrednosti odvodov, funkcijo smo zato odvajali. Tokrat funkcije v splošnem ne moremo odvajati, zato integriramo obe strani enakosti

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

na intervalu $[-\pi, \pi]$, funkcijsko vrsto na desni integriramo členoma. Dobimo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx).$$

Ker za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = \left. \frac{\sin(nx)}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

in

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = \left. \frac{-\cos(nx)}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

mora biti

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx = 2\pi a_0,$$

torej

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Pomnožimo sedaj enakost

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

s $\cos(nx)$ in jo integrirajmo na intervalu $[-\pi, \pi]$.
Izračunati moramo integrale oblike

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx \quad \text{in} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$.

Upoštevamo

$$\cos(kx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos(k+n)x + \cos(k-n)x),$$

$$\sin(kx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(k+n)x + \sin(k-n)x).$$

Vsi členi, razen enega, so enaki nič. Če je $k = n$, dobimo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} a_n dx.$$

Dobimo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

Pomnožimo enakost

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

še s $\sin(nx)$ in jo integrirajmo na intervalu $[-\pi, \pi]$.
Tokrat moramo izračunati integrale oblike

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx \quad \text{in} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$.

Na enak način kot prej dobimo

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Koefciente smo izračunali tako, da pri zapisu funkcije f v trigonometrijsko vrsto

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

velja enakost, če obe strani pomnožimo s $\sin(nx)$ ali $\cos(nx)$ in ju potem členoma integriramo.
Ostaja vprašanjem, kdaj trigonometrijska vrsta konvergira in za katere vrednosti spremenljivke x je vrednost funkcije $f(x)$ enaka vsoti trigonometrijske vrste.

Izrek

Naj bo periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *s periodo* 2π *odsekoma zvezna in v vsaki točki naj obstaja levi in desni odvod funkcije. Potem je Fourierjeva vrsta funkcije* f *konvergentna, torej funkcijska vrsta*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer je

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)dx.$$

Vsota Fourierjeve vrste je enaka vrednosti funkcije f *za vsak* $x \in \mathbb{R}$*, razen morda za tiste točke, kjer funkcija* f *ni zvezna.*

Če je funkcija f v točki x zvezna, potem je

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Če je x_0 točka nezveznosti funkcije f, potem je vsota Fourierjeve vrste enaka aritmetični sredini leve in desne limite funkcije f v točki x_0, torej

$$\frac{\lim_{x \nearrow x_0} f(x) + \lim_{x \searrow x_0} f(x)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)).$$

Spomnimo se, da je

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

torej velja tudi

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx) \quad \text{in} \quad e^{-inx} = \cos(nx) - i \sin(nx).$$

Prepričajmo se, da lahko Fourierjevo vrsto zapišemo tudi v obliki

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx},$$

kjer je $a_{-n} = a_n$ in $b_{-n} = -b_n$.
Dokaz.

Primer

Razvijmo v Fourierjevo vrsto funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Fourierjeva vrsta periodične funkcije s periodo T

Periodično funkcijo s periodo 2π lahko pri določenih pogojih razvijemo v Fourierjevo vrsto

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx. \end{aligned}$$

Naj bo f periodična funkcija spremenljivke t s periodo T, torej

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{za vsak} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Primer periodične funkcije s periodo T bi radi prevedli na že znani primer periodične funkcije s periodo 2π.
Vpeljali bomo novo spremenljivko x, tako da bo f periodična funkcija spremenljivke x s periodo 2π.
Z vpeljavo nove spremenljivke bi radi dosegli, da se interval $\left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ preslika na interval $[-\pi, \pi]$, torej, ko se t spreminja od $\frac{-T}{2}$ do $\frac{T}{2}$, se x spreminja od $-\pi$ do π.
Definiramo

$$x = \frac{2\pi}{T} t.$$

Funkcija f je za novo spremenljivko $x = \frac{2\pi}{T} t$ periodična funkcija s periodo 2π.
Pri razvoju funkcije f, odvisne od spremenljivke x, v Fourierjevo vrsto je

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Izračunajmo ta integral z vpeljavo nove spremenljivke t, za katero velja $x = \frac{2\pi}{T} t$.
Diferencial je

$$dx = \frac{2\pi}{T} dt$$

novi meji integriranja pa sta $-\frac{T}{2}$ in $\frac{T}{2}$.

Dobimo

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt.$$

Podobno dobimo še, da je

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\,dt,$$

in

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\,dt.$$

Razvoj periodične funkcije f s periodo T v Fourierjevo vrsto je potem

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)\right).$$

Primer

Sinusna napetost z amplitudo E in frekvenco $\frac{\omega}{2\pi}$ gre skozi usmernik, tako da odpadejo negativni valovi. Razvijmo to funkcijo v Fourierjevo vrsto.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{\omega} \leq t < 0 \\ E\sin(\omega t), & 0 \leq t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$