Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

23. april 2014

Soda in liha Fourierjeva vrsta

Opomba

- Pri razvoju sode periodične funkcije f v Fourierjevo vrsto v razvoju nastopajo samo sode funkcije (konstanta, kosinusi), torej so v tem primeru vsi koeficienti $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$
  Integral lihih funkcij $f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)$ na simetričnem intervalu je enak nič.
- Pri razvoju lihe periodične funkcije v Fourierjevo vrsto pa v razvoju nastopajo samo lihe funkcije (sinusi), torej so v tem primeru vsi koeficienti $a_n = 0$, $n = 0, 1, \dots$
  Integral lihih funkcij $f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)$ na simetričnem intervalu je enak nič.

Upoštevamo še, da velja:

- če je f soda funkcija, so funkcije $f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$, $n = 0, 1, \ldots$, sode,
- če je f liha funkcija, so funkcije $f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, zopet sode.

Integral sode funkcije na simetričnem intervalu je enak dvakratnemu integralu na polovičnem intervalu, zato lahko v primeru sodih in lihih funkcij razvijemo funkcije v Fourierjevo vrsto na naslednji način:

- Naj bo f soda funkcija s periodo T. Potem je

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)$$

kosinusna Fourierjeva vrsta, pri čemer je

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad \text{in} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt.$$

- Naj bo f liha funkcija s periodo T. Potem je

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right),$$

sinusna Fourierjeva vrsta, pri čemer je

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt.$$

Naj bo funkcija f definirana na intervalu $\left[0, \frac{T}{2}\right]$.
Potem je lahko vedno dopolnimo do sode ali do lihe funkcije na intervalu
$$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right].$$

Funkcijo f, definirano na intervalu $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, lahko razvijemo v kosinusno ali sinusno Fourierjevo vrsto.

- V prvem primeru funkcijo f, definirano na intervalu $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, najprej dopolnimo do lihe funkcije na intervalu $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, nato pa to funkcijo razvijemo v Fourierjevo vrsto, ki je v tem primeru sinusna Fourierjeva vrsta.
- V drugem primeru funkcijo f, definirano na intervalu $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, najprej dopolnimo do sode funkcije na intervalu $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, nato pa to funkcijo razvijemo v Fourierjevo vrsto, ki je v tem primeru kosinusna Fourierjeva vrsta.

Primer

Razvijmo s kosinusno in sinusno Fourierjevo vrsto funkcijo

$$f(t) = t,$$

ki je definirana na intervalu $[0, 1]$.

Fourierjev integral

Funkcijo, ki ni periodična, lahko zapišemo s pomočjo Fourierjevega integrala:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\right) d\omega,$$

pri čemer sta

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt \quad \text{in} \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt.$$

Razlika med Taylorjevo vrsto in Fourierjevo vrsto:

- Za razvoj v Taylorjevo vrsto potrebujemo, da je funkcija neskončnokrat odvedljiva, pri Fourierjevi vrsti zadošča, da je odsekoma zvezna in da obstajata levi in desni odvod funkcije.
- Koeficiente Taylorjeve vrste izračunamo s pomočjo odvodov, koeficiente Fourierjeve vrste izračunamo s pomočjo integralov.
- Taylorjeva vrsta dobro aproksimira funkcijo v neki točki in v bližnji okolici te točke, Fourierjeva vrsta dobro aproksimira funkcijo na celotni periodi, minimizira odstopanja na celotni periodi (v L_2 normi).
  Primer aproksimacije funkcije $\cos x$ z enim členom Taylorjeve vrste v točki $x = 0$ in enim členom Fourierjeve vrste na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Funkcije dveh spremenljivk

Ko opazujemo nek pojav, je ta sicer lahko odvisen od ene količine, bolj običajno pa je, da je rezultat odvisen od več količin.
Na primer:

- Kemijska reakcija je odvisna od temperature in tlaka.
- Temperatura v prostoru je odvisna od treh koordinat in časa.

Definicija

Realna funkcija f dveh spremenljivk je preslikava, ki slika iz območja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}$, torej

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Primer

Vsaki točki na Zemlji priredimo zemljepisno dolžino (zahodno ali vzhodno od greenwiškega poldnevnika) in zemljepisno širino (severno ali južno od ekvatorja). Aproksimirajo del območja na Zemlji z delom ravnine D. Preslikava f, ki vsaki točki območja D priredi nadmorsko višino v tej točki, je funkcija dveh spremenljivk.

Primer

Digitalna slika je sestavljena iz točk ("pikslov"). Vsaka točka ima določeni koordinati. Pri črno beli sliki (grayscale) vsaki točki priredimo vrednost z intervala $[0, 1]$, če je vrednost 0, je slika črna, če je vrednost 1, je slika bela, vrednosti med 0 in 1 določajo intenzivnost. Funkcija f, ki vsaki točki z danima koordinatama priredi vrednost na intervalu $[0, 1]$, je funkcija dveh spremenljivk. Pri barvni sliki je vsaka točka sestavljena iz treh (ali štirih pasov) za vsako izmed barv RGB, vsaka izmed barv ima potem podano intenzivnot.

Graf funkcije f dveh spremenljivk, definirane na območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$ v tridimenzionalnem koordinatnem sistemu, je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

ki predstavlja ploskev v prostoru.

Pri geometrijski predstavi funkcije f dveh spremenljivk, definirane na območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$, si lahko pomagamo tudi z izočrtami (contour line). Izočrte funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$ so krivulje v D, ki povezujejo tiste točke v D, pri katerih ima funkcija f isto vrednost.

Primer

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Izočrte so koncentrične krožnice.

Definicija

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je zvezna v točki $(x_0, y_0) \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

za vsako točko $(x, y) \in D$, za katero velja

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta,$$

to je

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Definicija

Funkcija $f \colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je enakomerno zvezna na območju D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

za vsaki točki $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, za kateri velja

$$|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta,$$

to je

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta.$$

Torej sta funkcijski vrednosti manj kot δ narazen za poljubni točki, ki sta za manj kot ε narazen.