Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

25. april 2014

Definicija

Število A je limita funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, v točki $(x_0, y_0) \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

za vsako točko $(x, y) \in D$, za katero velja

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta,$$

to je

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

To zapišemo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A.$$

Parcialni odvodi

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ funkcija dveh spremenljivk.
Če je vrednost spremenljivke y fiksna, na primer, $y = y_0$, vrednost spremenljivke x pa se spreminja, postane funkcija f funkcija ene spremenljivke x.
Funkcijo ene spremenljivke pa znamo odvajati. Definirajmo odvod funkcije dveh spremenljivk po eni izmed spremenljivk, pri čemer je druga izmed spremenljivk fiksna.

Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ funkcija dveh spremenljivk. Če obstaja limita diferenčnega kvocienta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

potem pravimo, da je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x v točki (x,y).
Parcilani odvod krajše zapišemo tudi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y).$$

Podobno definiramo parcialni odvod funkcije f po spremenljivki y s predpisom

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

Geometrijska interpretacija parcialnega odvoda.

Primer

Izračunajmo parcialna odvoda funkcij

- $$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y},$$
- $$f(x, y) = \log(x + xy + y^2).$$

Če je f funkcija ene spremenljivke, potem je njen diferencial definiran kot

$$df = f'(x) \cdot dx.$$

Geometrijska interpretacija diferenciala je, da graf funkcije aproksimiramo s premico, torej funkcijo aproksimiramo z linearno preslikavo.
Na podoben način definiramo tudi diferencial funkcije dveh spremenljivk.

Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zvezna funkcija dveh spremenljivk in naj v točki (a,b) obstajata njena parcialna odvoda $f_x(a,b)$ in $f_y(a,b)$.
Če obstaja limita

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

potem pravimo, da je f diferenciabilna funkcija v točki (a,b).
Izraz

$$df = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$$

imenujemo totalni diferencial funkcije f.

Opomba

Če je funkcija f diferenciabilna v točki (a, b), potem je

$$f(a+h, b+k) \doteq f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k.$$

S pomočjo diferenciala lahko graf funkcije dveh spremenljivk aproksimiramo z grafom linearne funkcije, to je ravnino.

Primer

Stožec s polmerom $R = 5$ in višino $h = 15$. Koliko se spremeni prostornina, če povečamo polmer za 0.1 in zmanjšamo višino za $h = 0.2$?