Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

7. maj 2014

Oglejmo si pravilo za odvajanje posrednih funkcij, to je, verižno pravilo. Do pravila pridemo v dveh korakih:

- $$z = z(u, v), \quad u = u(x), v = v(x).$$
- $$z = z(u, v), \quad u = u(x, y), v = v(x, y).$$

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$$

$$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y$$

Primer

$$z = u^2 \log v, \quad u = \frac{x}{y}, v = xy.$$

Višji odvodi

Če parcialno odvedljivo funkcijo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, parcialno odvajamo, sta funkciji $f_x, f_y\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zopet funkciji dveh spremenljivk.
Če sta parcialno odvedljivi, ju lahko ponovno parcialno odvajamo in dobimo parcialne odvode drugega reda:

- $$\frac{\partial f_x}{\partial x}(x,y) = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$
- $$\frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y) = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$
- $$\frac{\partial f_y}{\partial x}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$
- $$\frac{\partial f_y}{\partial y}(x,y) = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Izrek

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, dvakrat parcialno odvedljiva funkcija. Če sta funkciji f_{xy} in f_{yx} zvezni, potem velja

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Opomba

V splošnem mešana odvoda funkcije nista enaka.

Definicija

Matrika drugih parcialnih odvodov funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

se imenuje Hessejeva matrika.

Opomba

Elementi Hessejeve matrike so funkcije.

Opomba

Če sta druga parcialna odvoda funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, zvezna, potem je Hessejeva matrika funkcije f simetrična.

Primer

Izračunajmo Hessejevo matriko za funkcijo

$$f(x, y) = \frac{xy^2 - 1}{x^2 + 1}$$

v točki $(1, 0)$.

Taylorjeva vrsta funkcije dveh spremenljivk

Izrek

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, neskončnokrat parcialno odvedljiva funkcija. Potem jo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = {} & f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k \\ & + \frac{1}{2}(f_{xx}(x,y)h^2 + 2f_{xy}(x,y)hk + f_{yy}(x,y)k^2) \\ & + \ldots \\ = {} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x,y) \end{aligned}$$

Primer

S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto ocenimo vrednost izraza

$$e^{0.1}\sqrt{0.9}.$$

Definicija

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ima v točki (a, b) ekstrem, če obstaja tako število $\delta > 0$, da ima izraz

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \tag{1}$$

isti predznak za vsak h, k, za katera velja $h^2 + k^2 < \delta^2$. Če je izraz (1) pozitiven, je v točki (a, b) minimum, če je izraz (1) negativen, je v točki (a, b) maksimum.

Kakšnemu pogoju mora zadoščati funkcija, da bo v točki (a, b) ekstrem?
Če fiksiramo eno izmed neodvisnih spremenljivk, na primer $y = b$, potem je funkcija $g(x) = f(x, b)$ funkcija ene spremenljivke, potreben pogoj za nastop ekstrema funkcije g pa je $g'(a) = f_x(a, b) = 0$.
Podobno razmislimo, da mora biti $f_y(a, b) = 0$.
Torej je potreben pogoj za nastop ekstrema funkcije dveh spremenljivk v točki (a, b) pogoj

$$f_x(a, b) = 0$$
$$f_y(a, b) = 0$$

Omenjeni pogoj pa ni tudi zadosten pogoj za nastop ekstrema.
Lahko sta oba parcialna odvoda v neki točki enaka nič, pa v tej točki ni ekstrema (sedlo).
Točke (x, y), za katere velja

$$f_x(x, y) = 0$$
$$f_y(x, y) = 0$$

imenujemo stacionarne točke funkcije f.