# Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

9. maj 2014

Izpeljimo zadosten pogoj za nastop ekstrema.
Naj bo $(a,b)$ stacionarna točka funkcije $f$. Razvijmo funkcijo $f$ v okolici točke $(a,b)$ v Taylorjevo vrsto.

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = & \quad f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\ & + \frac{1}{2}(f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2) \\ & + \dots \end{aligned}$$

Označimo

$$f_{xx}(a,b) = A, \quad f_{xy}(a,b) = B, \quad f_{yy}(a,b) = C$$

in upoštevajmo, da je

$$f_x(a,b) = 0, \quad f_y(a,b) = 0$$

Dobimo, da ima izraz

$$f(a+h,b+k) - f(a,b)$$

za majhne vrednosti $h$ in $k$ isti predznak kot

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

Naj bo $A$ različen od nič.
Potem je

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2}{A}.$$

Če je $AC - B^2 > 0$, bo števec vedno pozitiven. Za $A > 0$ je potem v točki $(a, b)$ minimum, za $A < 0$ pa je v točki $(a, b)$ maksimum.
Če je $AC - B^2 < 0$, je lahko števec pozitiven in negativen.

## Izrek

*Funkcija* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, *ima v stacionarni točki* $(a, b)$ *ekstrem, če velja, da je*

$$\det H(a, b) > 0.$$

*V tem primeru je za* $A > 0$ *v točki* $(a, b)$ *minimum, za* $A < 0$ *pa maksimum.*
*Če je*

$$\det H(a, b) < 0,$$

*v točki* $(a, b)$ *ni ekstrema.*
*Če je*

$$\det H(a, b) = 0,$$

*s pomočjo drugih parcialnih odvodov ne moremo ugotoviti, ali je v točki* $(a, b)$ *ekstrem ali ne.*

### Primer

Določimo ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

# Vezani ekstrem

Iščemo ekstrem funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, pri pogoju, da velja

$$g(x, y) = 0.$$

Torej iščemo ekstrem funkcije na neki podmnožici definicijskega območja, ta podmnožica je določena z zvezo $g(x, y) = 0$ med spremenljivkama $x$ in $y$.
Z enačbo $g(x, y) = 0$ je implicitno določena krivulja v $\mathbb{R}^2$.

Oglejmo si Lagrangevo metodo za določanje vezanega ekstrema funkcije $f$ pri pogoju $g(x, y) = 0$.
Definiramo novo funkcijo $F$ treh spremenljivk $x, y$ in $\lambda$ s predpisom

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Funkcijo $F$ imenujemo Lagrangeva funkcija, parameter $\lambda$ pa Lagrangev multiplikator.

Točke, ki so kandidati za vezani ekstrem, poiščemo tako, da poiščemo stacionarne točke funkcije $F$, torej

$$F_x(x, y, \lambda) = 0,$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 0,$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

Dobimo tri enačbe za tri neznanke, pri čemer je zadnja enačba enaka pogoju

$$g(x, y) = 0.$$

### Primer

Določimo ekstrem funkcije

$$f(x, y) = x + 2y$$

pri pogoju

$$x^2 + y^2 = 5.$$

### Primer

Določimo, kateri valj ima pri dani površini največjo prostornino.