Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

14. maj 2014

Implicitno podane funkcije

Uporabimo lastnosti parcialnega odvajanja funkcije dveh spremenljivk pri obravnavanju implicitno podane funkcije ene spremenljivke.
Kdaj je z enačbo

$$F(x, y) = 0$$

implicitno podana funkcija ene spremenljivke

$$y = f(x)?$$

Kdaj lahko izrazimo spremenljivko y kot funkcijo spremenljivke x?

Izrek

Naj ima funkcija dveh spremenljivk F naslednje lastnosti:

- $$F(a,b)=0$$
- *V okolici točke (a,b) je F parcialno zvezno odvedljiva*
- $$F_y(a,b)\neq 0$$

Potem v okolici U točke a obstaja enolično določena funkcija $y=f(x)$, tako da je $f(a)=b$ in

$$F(x,f(x))=0$$

za vsak x iz U.

Primer

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Izračunajmo odvod implicitno podane funkcije.
Naj funkcija F zadošča pogojem izreka, torej lahko iz enačbe

$$F(x, y) = 0$$

izrazimo

$$y = y(x).$$

Ker je $F(x, y(x)) = 0$, je potem tudi diferencial funkcije F enak nič, torej

$$F_x dx + F_y dy = 0,$$

oziroma

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Primer

Določimo odvod funkcije y, katere graf gre skozi točko $(1, 0)$, funkcija pa je podana implicitno z enačbo

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x} = 0.$$

Koliko je odvod funkcije y v točki $x = 1$?

Diferencialne enačbe

Diferencialne enačbe igrajo osrednjo vlogo pri matematičnem opisu pojavov pri naravoslovnih znanostih (fiziki), tehniki, pa tudi v ekonomiji, medicini, ...
Na primer:

- gibanje delca
- radioaktivni razpad delca
- električni krog
- rast populacij
- oblika celične membrane

Pri opisovanju pojava na vrednost neke količine vpliva tudi, kako se ta količina spreminja.
Vrednosti količine so podane s funkcijo, spreminjanje količine z odvodom te funkcije.

Ločimo dve vrsti diferencialnih enačb:

- navadne diferencialne enačbe
  V enačbi nastopa neznana funkcija $y = y(x)$ ene spremenljivke x, odvodi te funkcije y', y'', ... in neodvisna spremenljivka x.
  Na primer,
  $$y'(x) = ky(x).$$

- parcialne diferencialne enačbe
  V enačbi nastopa neznana funkcija več spremenljivk, parcialni odvodi te funkcije in neodvisne spremenljivke.
  Na primer,
  $$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0.$$

V nadaljevanju bomo obravnavali navadne diferencialne enačbe, parcialne diferencialne enačbe obravnavamo pri Matematiki 4.

V diferencialni enačbi za funkcijo y, ki je ne poznamo, nastopajo odvodi funkcije y do nekega reda.
Diferencialna enačba je reda n, če v enačbi nastopa n-ti odvod funkcije, višji odvodi funkcije pa v diferencialni enačbi ne nastopajo.
Diferencialno enačbo reda n v splošnem zapišemo v obliki

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Primer

Diferencialna enačba

$$x^5 y^{(4)}(x) - y'(x)y''(x)y'''(x) + x = 5$$

je reda 4.

Rešiti diferencialno enačbo

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

pomeni poiskati tako funkcijo y, da velja enakost za vsak x na nekem območju.
Rešitev diferencialne enačbe je lahko več.

Primer

Diferencialna enačba

$$y'(x) = y(x)$$

ima neskončno rešitev

$$y(x) = Ce^{x}.$$

Če pri rešitvi diferencialne enačbe nastopa nedoločena konstanta C, potem tako rešitev imenujemo splošna rešitev diferencialne enačbe. Če je rešitev diferencialne enačbe enolično določena, jo imenujemo partikularna rešitev. Dobimo jo lahko, če podamo

- začetne pogoje, npr.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

  (začetni problem)

- robne pogoje, npr.

$$y(x_z) = y_z, y(x_k) = y_k$$

  (robni problem)

Opomba

Diferencialna enačba lahko nima nobene splošne rešitve ali nobene partikularne rešitve.

Primer

Radioaktivni razpad radona Ra_{88}^{220}.
Imamo 2 g radona, $k = -1.4 \cdot 10^{-11}$ s^{-1}.
Koliko radona imamo čez 1 leto, koliko je razpolovna doba?
Diferencialna enačba

$$y'(t) = ky(t)$$

Začetni pogoj

$$y(0) = 2\text{g}$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe

$$y(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$$

Partikularna rešitev diferencialne enačbe

$$y(t) = 2 \cdot e^{-1.4 \cdot 10^{-11} \text{s}^{-1} \cdot t} \text{g}$$

Količina radona čez eno leto

$$y(1 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) = 1.9991$$

Razpolovna doba radona je 1570 let.

V splošnem je iskanje rešitev diferencialne enačbe zahteven problem.
Ogledali si bomo postopke, kako rešimo nekatere vrste diferencialnih enačb.
Obravnavali bomo diferencialne enačbe prvega reda oblike

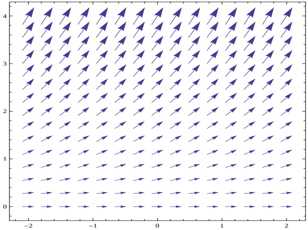
$$y' = f(x, y),$$

pri čemer iščemo neznano funkcijo $y = y(x)$.

V primeru diferencialne enačbe oblike $y' = f(x, y)$ si lahko pomagamo z geometrijsko predstavo.
V ravnini lahko narišemo polje smeri.

Primer

$$y' = \frac{1}{2}y$$



Vidi se, da ima diferencialna enačba neskončno rešitev, pri danem začetnem pogoju pa natanko eno rešitev.

Diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama

Definicija

Diferencilana enačba oblike

$$y' = g(x) \cdot f(y)$$

se imenuje diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama.

Primer

- $$y' = \frac{x^3 y}{1 + y^2}$$
- $$yy' = \cos x$$
- $$y' = y$$

Diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama

$$y' = g(x) \cdot f(y)$$

rešimo na naslednji način:

- Zapišemo
$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$
- Če je $f(y) = 0$, potem je y konstantna funkcija, zato lahko privzamemo, da je $f(y) \neq 0$, torej
$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$$
-
$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx$$
- Pri pogoju $y(x_0) = y_0$ dobimo
$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{f(t)} = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Primer

$$9yy' + 4x = 0$$

Količina neke snovi v odvisnosti od časa pri kemijski reakciji. Iščemo $m(t)$.

$$\frac{dm}{dt} = k \cdot m^p.$$

Homogena diferencialna enačba

Nekatere diferencialne enačbe lahko z ustrezno substitucijo prevedemo na diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami.

Definicija

Diferencilana enačba oblike

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se imenuje homogena diferencialna enačba.

Rešimo jo tako, da uvedemo novo spremenljivko

$$u = \frac{y}{x}.$$

Potem je $y = u \cdot x$ in $y' = u'x + u$, torej

$$u' \cdot x + u = f(u).$$

Primer

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0.$$