Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

16. maj 2014

Linearna diferencialna enačba prvega reda

Definicija

Diferencilana enačba oblike

$$y' + f(x)y = g(x)$$

se imenuje linearna diferencialna enačba prvega reda. Če je $g(x) = 0$ za vsak x, dobimo

$$y' + f(x)y = 0,$$

in v tem primeru pravimo, da je linearna diferencialna enačba homogena. Če je $g(x) \neq 0$ za nek x, je linearna diferencialna enačba nehomogena.

Linearno diferencialno enačbo prvega reda rešimo z metodo variacije konstante. To storimo v dveh korakih:

- Najprej rešimo homogeno diferencialno enačbo
- Z variacijo konstante rešimo nehomogeno diferencialno enačbo

Poščimo najprej rešitev homogene linearne diferencialne enačbe

$$y' + f(x)y = 0.$$

Homogena linearna diferencialna enačba je diferencialna enačba oblike

$$y' = -f(x)y,$$

torej je to diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami, ki jo znamo rešiti.

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$$

$$\log y = -\int f(x)dx + \log C$$

$$y = Ce^{-\int f(x)dx}$$

Dobili smo splošno rešitev homogene linearne diferencialne enačbe. Označimo

$$y_h(x) = e^{-\int f(x)dx}$$

Rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe poiščemo z metodo variacije konstante.
To pomeni, da iščemo rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe z nastavkom

$$y(x) = C(x)y_h(x),$$

pri čemer je $C(x)$ neznana funkcija, ki jo moramo določiti.
Funkcija $C(x)$ zagotovo ni konstanta, saj bi bila v tem primeru funkcija y rešitev homogene linearne DE, mi pa iščemo tako funkcijo, ki bo rešitev nehomogene linearne DE.

Vstavimo funkcijo $y(x) = C(x)y_h(x)$ v nehomogeno linearno DE in poglejmo, kakšnim pogojem mora zadoščati funkcija $C(x)$.

$$(C(x)y_h)' + f(x)C(x)y_h(x) = g(x)$$

$$C'(x)y_h(x) + C(x)y_h'(x) + f(x)C(x)y_h(x) = g(x)$$

$$C'(x)y_h(x) + C(x)(y_h'(x) + f(x)y_h(x)) = g(x)$$

Funkcija y_h je rešitev homogene linearne DE $y' + f(x)y = 0$, torej je

$$y_h'(x) + f(x)y_h(x) = 0$$

Sledi

$$C'(x)y_h(x) = g(x)$$

$$C'(x) = \frac{g(x)}{y_h(x)}$$

$$C(x) = \int \frac{g(x)}{y_h(x)} dx$$

Torej je rešitev nehomogene linearne DE enaka

$$y(x) = C(x)y_h(x) = \int \frac{g(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x)$$

Izrek

Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe prvega reda

$$y' + f(x)y = g(x)$$

je oblike

$$y(x) = Cy_h(x) + y_p(x),$$

pri čemer je Cy_h splošna rešitev homogene linearne diferencialne enačbe, y_p pa partikularna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe. V rešitvi nastopa natanko ena splošna konstanta C.

Primer

Rešimo diferencialno enačbo

$$y' + y \tan x = \cos x.$$