Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

21. maj 2014

Primer

Bakreno kroglo, ki ima temperaturo 100° C damo v bazen z vodo, ki ima temperaturo 30° C. Po 3 min ima krogla 70° C. Kdaj bo imela krogla 31° C?

Naj bo f funkcija, ki meri temperaturo krogle v odvisnosti od časa. Torej je

$$f(0) = 100^\circ\mathrm{C} \quad \text{in } f(180) = 70^\circ\mathrm{C}.$$

Zanima nas, po kolikšnem času t_0 je $f(t_0) = 31^\circ$ C.
Velja

$$f'(t) = k(f(t) - 30).$$

Bernoullijeva diferencialna enačba

Definicija

Diferencialno enačbo oblike

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha},$$

pri čemer je $\alpha \neq 1$ in $\alpha \neq 0$, imenujemo Bernoullijeva diferencialna enačba.

Zakaj pogoj $\alpha \neq 1$ in $\alpha \neq 0$?

Bernoullijevo diferencialno enačbo rešimo tako, da je z uvedbo nove spremenljivke prevedemo na linearno DE.
Najprej delimo enačbo z y^α, da dobimo

$$y' y^{-\alpha} + f(x) y^{1-\alpha} = g(x),$$

nato pa uvedemo novo spremenljivko

$$u(x) = y^{1-\alpha}(x).$$

Potem je

$$u'(x) = (1-\alpha) y^{-\alpha}(x) y'(x)$$

in dobimo

$$\frac{1}{1-\alpha} u' + f(x) u = g(x),$$

kar pa je nehomogena linearna DE za neznano funkcijo u.

Primer

Rešimo diferencialno enačbo

$$y' + y = x \cdot \sqrt{y}.$$

Eksaktna diferencialna enačba

Definicija

Diferencialno enačbo oblike $y' = f(x, y)$, torej $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, lahko zapišemo v obliki

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1}$$

Če sta M in N zvezno parcialno odvedljivi funkciji dveh spremenljivk in velja, da je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

potem parcialno diferencialno enačbo (1) imenujemo eksaktna diferencialna enačba.

Rešitev eksaktne diferencialne enačbe

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

dobimo v implicitni obliki

$$F(x,y) = C,$$

pri čemer je F taka funkcija, da velja

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{in} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N. \tag{2}$$

Funkcija dveh spremenljivk F, ki zadošča pogoju (2), res implicitno določa rešitev y eksaktne diferencialne enačbe, saj je

$$dF(x,y) = F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

torej

$$dF(x,y) = 0$$

in zato

$$F(x,y) = C$$

za neko konstanto C.
Pogoj (2) pove, da je

$$F_{xy} = F_{yx}.$$

Primer

Rešimo diferencialno enačbo

$$y' = -\frac{y}{3y^2 + x}.$$

Reševanje DE z vpeljavo parametra

Oglejmo si dve vrsti diferencilanih enačb prvega reda, ki ju lahko rešimo z vpeljavo nove spremenljivke - parametra.

- V DE enačbi ne nastopa spremenljivka y, torej rešujemo DE oblike
$$F(x, y') = 0$$
- V DE ne nastopa neodvisna spremenljivka x, torej rešujemo DE oblike
$$F(y, y') = 0$$

Rešujemo DE oblike $F(x, y') = 0$.
Če lahko izrazimo $y' = f(x)$, potem je to DE z ločljivima spremenljivkama, ki jo znamo rešiti

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

torej

$$dy = f(x)dx.$$