Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

23. maj 2014

Če lahko izrazimo $x = f(y')$, potem vpeljemo parameter

$$p = y', \quad \text{torej} \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

Sledi

$$x = f(p)$$

in

$$dx = f'(p)dp.$$

Torej je

$$\frac{dy}{p} = f'(p)dp,$$

oziroma

$$y = \int f'(p)pdp.$$

Ker je

$$x = f(p),$$

smo dobili parametrični zapis rešitve DE.

Primer

Rešimo diferencialno enačbo

$$4(y')^3 - 2y' + x = 0.$$

Rešujemo DE oblike $F(y, y') = 0$.
Če lahko izrazimo $y' = f(y)$, potem je to DE z ločljivima spremenljivkama, ki jo znamo rešiti

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

torej

$$\frac{dy}{f(y)} = dx.$$

Če lahko izrazimo $y = f(y')$, potem vpeljemo parameter

$$p = y', \quad \text{torej} \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

Sledi

$$y = f(p)$$

in

$$dy = f'(p)dp.$$

Torej je

$$pdx = f'(p)dp,$$

oziroma

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} dp.$$

Ker je

$$y = f(p),$$

smo dobili parametrični zapis rešitve DE.

Primer

Rešimo diferencialno enačbo

$$y - y' - \sqrt{1 + (y')^2} = 0.$$

Obstoj in enoličnost rešitve diferencialne enačbe

Doslej smo si ogledali nekaj postopkov, kako lahko v posebnih primerih za diferencialno enačbo oblike $y' = f(x, y)$ pridemo do rešitve.
Oglejmo si, kako je z obstojem rešitve začetnega problema za diferencialno enačbo

$$y' = f(x, y)$$

pri začetnem pogoju

$$y(x_0) = y_0.$$

Ta začetni problem (diferencialna enačba skupaj z začetnim pogojem) ima lahko več rešitev, natanko eno rešitev, lahko pa tudi nima nobene rešitve.

Primer

Splošna rešitev diferencialne enačbe

$$y' = 2\frac{y}{x}$$

je

$$y = Cx^2.$$

- Če je $y(0) = 0$, obstaja neskončno rešitev $y = Cx^2$.
- Če je $y(1) = 1$, obstaja natanko eno rešitev $y = x^2$.
- Če je $y(0) = 1$, ne obstaja nobena rešitev.

Naslednja izreka natančneje povesta, kdaj ima diferencialna enačba

$$y' = f(x, y)$$

pri začetnem pogoju

$$y(x_0) = y_0$$

rešitev in kdaj je ta rešitev ena sama.

Izrek

Naj bo f zvezna funkcija dveh spremenljivk, ki je omejena na pravokotniku

$$Q = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

torej obstaja konstanta M, da je

$$|f(x, y)| \leq M \quad \text{za vsak} \quad (x, y) \in Q.$$

Potem v okolici točke x_0 obstaja rešitev diferencialne enačbe

$$y' = f(x, y)$$

pri začetnem pogoju

$$y(x_0) = y_0.$$

Izrek

Naj bo f zvezna in parcialno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk, ki je na pravokotniku

$$Q = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

omejena, prav tako pa je na Q omejen tudi njen parcialni odvod po spremenljivki y. Torej obstajata taki konstanti M in N, da je

$$|f(x, y)| \leq M \quad \textit{in} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \leq N \quad \textit{za vsak} \quad (x, y) \in Q.$$

Potem v okolici točke x_0 obstaja natanko ena rešitev diferencialne enačbe

$$y' = f(x, y)$$

pri začetnem pogoju

$$y(x_0) = y_0.$$

Rešitev lahko poiščemo iterativno s pomočjo Picardove formule

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt.$$

Zaporedje

$$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

konvergira k rešitvi y diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$ pri pogoju $y(x_0) = y_0$.

Rešimo diferencialno enačbo

$$y' = y$$

pri začetnem pogoju

$$y(0) = 1$$

s pomočjo Picardove formule

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt.$$

V tem primeru je

$$f(x, y) = y, \quad x_0 = 0 \quad \text{in} \quad y_0 = 1.$$

Z iteracijskim postopkom dobivamo vedno več členov Taylorjeve vrste za funkcijo e^x.

Družine krivulj, ortogonalne trajektorije

Z enačbo

$$F(x, y) = 0$$

je v splošnem določena krivulja v ravnini. Če v enačbi poleg spremenljivk x in y nastopa še neka splošna konstanta C, torej

$$F(x, y, C) = 0,$$

potem ta enačba določa neko družino krivulj v ravnini.
Na primer, enačba

$$x^2 + y^2 = C^2$$

določa družino koncentričnih krožnic v ravnini s polmerom C.

Vemo, da splošna rešitev neke diferencialne enačbe prvega reda določa neko družino krivulj v ravnini.
Lahko pa tudi za dano družino krivulj v ravnini poiščemo diferencialno enačbo, katere rešitev je dana družina krivulj.

Naj bo dana družina krivulj

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Poiščimo diferencialno enačbo, katere rešitev bo ta družina krivulj.

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Definicija

Krivulja, ki je pravokotna na dano družino krivulj, se imenuje ortogonalna trajektorija. Vse ortogonalne trajektorije na dano družino krivulj določajo družino ortogonalnih trajektorij dane družine krivulj.

Oglejmo si, kako izračunamo ortogonalne trajektorije na dano družino krivulj.

Naj bo družina krivulj podana z enačbo

$$F(x, y, C) = 0.$$

Njene ortogonalne trajektorije poiščemo v dveh korakih.

- Najprej poiščemo diferencialno enačbo, ki določa dano družino krivulj
$$y' = f(x, y).$$
- Rešimo diferencialno enačbo
$$y' = -\frac{1}{f(x, y)},$$
saj za smerna koeficienta k_1 in k_2 pravokotnih premic velja, da je $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.
Rešitev te diferencialne enačbe določa družino ortogonalnih trajektorij na dano družino $F(x, y, C) = 0$.

Primer

Poiščimo ortogonalne trajektorije na družino koncentričnih krožnic

$$x^2 + y^2 = C^2.$$