Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

28. maj 2014

Diferencialne enačbe višjega reda

Spomnimo se, da je diferencialna enačba n-tega reda diferencialna enačba oblike

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

splošna rešitev diferencialne enačbe n-tega pa je

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

V rešitvi nastopa n konstant, ki jih določimo s pomočjo

- n začetnih pogojev

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

- n robnih pogojev

$$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, \ldots, y(x_n) = y_n$$

Reševanje diferencialnih enačb višjega reda je zelo zahteven problem.
Zato se bomo pri obravnavanju diferencialnih enačb višjega reda omejili na linearne diferencialne enačbe.

Definicija

Linearna diferencialna enačba n-tega reda je diferencialna enačba oblike

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = r(x).$$

Linearna diferencialna enačba drugega reda, ko je torej $n = 2$, je diferencialna enačba oblike

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = r(x).$$

Oglejmo si najprej homogeno linearno diferencialno enačbo drugega reda, torej diferencialno enačbo oblike

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0. \qquad (1)$$

Trditev

Denimo, da sta y_1 in y_2 rešitvi homogene linearne diferencialne enačbe drugega reda (1). Potem je tudi vsaka linearna kombinacija funkcij y_1 in y_2, torej funkcija

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \quad \textit{poljubni konstanti},$$

prav tako rešitev diferencialne enačbe (1).

Dokaz

Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi homogene LDE drugega reda

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0$$

in naj bo

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Potem je

$$\begin{gathered}
(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))'' + f(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))' \\
+ g(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) \\
= C_1(y_1''(x) + f(x)y_1'(x) + g(x)y_1(x)) \\
+ C_2(y_2''(x) + f(x)y_2'(x) + g(x)y_2(x)) \\
= 0
\end{gathered}$$

Če je y_1 rešitev homogene LDE, potem smo pokazali, da je npr. $y_1 + y_1 = 2y_1$ tudi rešitev.
Ta rešitev ni bistveno drugačna od rešitve y_1.

Definicija

Funkciji y_1 in y_2 sta linearno odvisni, če obstaja neka konstanta C, tako da je

$$y_2(x) = Cy_1(x)$$

za vsak x iz definicijskega območja funkcije y_1.
Če kvocient

$$\frac{y_1}{y_2}$$

ni kostantna funkcija, potem sta funkciji y_1 in y_2 linearno nedovisni.

Primer

- $$y_1(x) = \sin x \cos x, \quad y_2(x) = \sin x$$
- $$y_1(x) = \sin x \cos x, \quad y_2(x) = \sin(2x)$$

Pri ugotavljanju linearne odvisnosti funkcij y_1 in y_2 si lahko pomagamo z determinanto Wronskega

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Če je determinanta Wronskega enaka nič za vsak x iz nekega območja, potem sta funkciji linearno odvisni.
Če je determinanta Wronskega različna od nič za nek x, potem sta funkciji linearno neodvisni.
Determinanto Wronskega lahko posplošimo tudi na več funkcij.

Primer

Preverimo linearno odvisnost funkcij še z determinanto Wronskega.

- $$y_1(x) = \sin x \cos x, \quad y_2(x) = \sin x$$
- $$y_1(x) = \sin x \cos x, \quad y_2(x) = \sin(2x)$$

Izrek

Funkcija

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

je splošna rešitev diferencialne enačbe

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0. \tag{2}$$

natanko tedaj, ko sta y_1 *in* y_2 *linearno nedovisni rešitvi diferencialne enačbe (2).*

Opomba

Če dobimo splošno rešitev DE, potem smo dobili vse rešitve DE. Če hočemo torej poiskati vse rešitve diferencialne enačbe (2), potem moramo poiskati dve linearno neodvisni rešitvi y_1 in y_2, vsaka druga rešitev pa je potem linearna kombinacija teh dveh.

Pri linearnih diferencialnih enačbah drugega reda se bomo omejili na dva tipa diferencialnih enačb:

- Linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti
- Eulerjeva diferencialna enačba

Definicija

Diferencialna enačba oblike

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = r(x),$$

pri čemer sta $a, b \in \mathbb{R}$ konstanti, se imenuje linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti.

Zapisana diferencialna enačba je homogena, če je $r(x) = 0$ za vsak x.

Rešitev homogene diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

iščemo z nastavkom

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Potem je $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ in $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, torej

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0.$$

Enakost krajšamo z $e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Če je konstanta λ rešitev karakteristične enačbe

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

potem je funkcija

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

rešitev diferencialne enačbe

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Kvadratna enačba ima lahko:

- dve različni realni rešitvi
- dve različni konjugirani kompleksni rešitvi
- eno realno rešitev

Karakteristična enačba ima dve različni realni rešitvi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Potem sta $e^{\lambda_1 x}$ in $e^{\lambda_2 x}$ linearno neodvisni rešitvi, saj

$$\frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

ni konstantna funkcija.
Splošna rešitev homogene LDE s konstantnimi koeficienti je potem

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Karakteristična enačba ima dve različni kompleksni rešitvi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = p + \mathrm{i}q \neq \lambda_2 = p - \mathrm{i}q$.
Spomnimo se, da je

$$e^{\mathrm{i}qx} = \cos(qx) + \mathrm{i}\sin(qx).$$

Potem je

$$\begin{gathered} C_1 e^{(p+\mathrm{i}q)x} + C_2 e^{(p-\mathrm{i}q)x} \\ = e^{px}(C_1 e^{\mathrm{i}qx} + C_2 e^{-\mathrm{i}qx}) \\ = e^{px}(C_1(\cos(qx) + \mathrm{i}\sin(qx)) + C_2(\cos(qx) - \mathrm{i}\sin(qx))) \\ = e^{px}(\cos(qx)(C_1 + C_2) + \sin(qx)\mathrm{i}(C_1 - C_2)) \end{gathered}$$

Splošna rešitev homogene LDE s konstantnimi koeficienti je potem

$$y(x) = e^{px}(D_1\cos(qx) + D_2\sin(qx)).$$

Linearno neodvisni rešitvi sta $e^{px}\cos(qx)$ in $e^{px}\sin(qx)$.

Karakteristična enačba ima eno realno rešitev $\lambda \in \mathbb{R}$.
Izkaže se, da je druga linearno neodvisna rešitev $xe^{\lambda x}$.
Očitno sta $e^{\lambda x}$ in $xe^{\lambda x}$ linearno neodvisni funkciji.
Preverimo, da je $xe^{\lambda x}$ res rešitev DE.

Splošna rešitev homogene LDE s konstantnimi koeficienti je potem

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Primer

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Primer

$$y'' + y' + 4y = 0$$

Primer

$$y'' - 2y' + y = 0$$